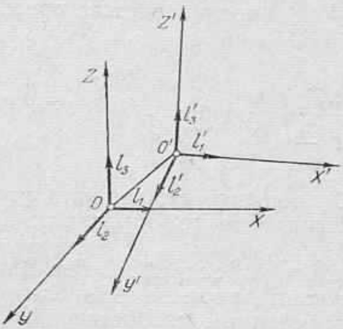
УДК 528.236

В. Г. КИРИЛЛОВ
Коммунарский горно-металлургический институт

ХАРАКТЕР ЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КООРДИНАТ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Проблема преобразования пространственных прямоугольных координат (и определения его параметров) в настоящее время весьма актуальна [5, 6, 8]. Однако вычислению параметров должно предшествовать определение их числа, т. е. установление вида преобразования, которое оптимальным образом переводит координаты одной системы в другую. При этом определяется, будет ли данное преобразование ортогональным, подобным или аффинным.



Расположение двух систем координат в пространстве.

Чтобы установить вид преобразования, в фотограмметрии обычно применяют метод последовательных приближений, переходя от простых преобразований к более сложным. В работе [1] предложено вычислять искажения углов, линий и объемов и, анализируя их, определять вид преобразования. Такие вычисления можно выполнять на ЭВМ по формулам, полученным на основании аналитической геометрии.

При наличии теории искажений для преобразования координат в трехмерном пространстве вид преобразования можно было бы устанавливать проще. С помощью данной теории можно ответить на многие вопросы. Например, каковы будут наибольший и наименьший масштабы ($m_{\text{макс}}$ и $m_{\text{мин}}$), в какой точке искажения направлений и углов будут наибольшими и др. При этом формулы для вычисления искажений должны быть проще известных из аналитической геометрии. Таким образом, для успешного анализа преобразования пространственных прямоугольных координат необходимо разработать теорию искажений в трехмерном пространстве. Данная статья посвящена одному разделу этой теории — исследованию линейных искажений.

Для изображения эллипсоида на плоскости теория искажений разработана В. В. Каврайским [2]. Он рассматривал эллипс искажений и отмечал, что любая бесконечно малая окружность поверхности сфероида изображается на плоскости бесконечно малым эллипсом, который достаточно полно характеризует свойства проекции в соответствующей точке. В пространстве, очевидно, искажения при преобразованиях будет характеризовать поверхность второго порядка («эллипсоид искажений»).

Установим тип поверхности. Пусть орты в старой системе координат равны l_1, l_2, l_3, а в новой — l'_1, l'_2, l'_3 (рисунок), причем $|l_1| \neq |l_2| \neq |l_3|$ и $|l'_1| \neq |l'_2| \neq |l'_3|$, т. е. ортогональная аффинная система преобразуется в ортогональную аффинную систему *. Тогда масштабы по осям координат будут:

$$m_x = \frac{|l'_1|}{l_2}; \; m_y = \frac{|l'_2|}{l_2}; \; m_2 = \frac{|l'_3|}{l_3}. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что $m_x \neq m_y \neq m_z$.

Пусть в старой системе радиусом r описана сфера с центром в точке 0. Тогда ее уравнение будет иметь вид

$$(Xl_1)^2 + (Yl_2)^2 + (Zl_3)^2 = r^2. \tag{2}$$

Представив значения l_1, l_2, l_3 из формул (1) и (2), получим

$$\left(\frac{Xl'_1}{m_x}\right)^2 + \left(\frac{Yl'_2}{m_y}\right)^2 + \left(\frac{Zl'_3}{m_z}\right)^2 = r^2, \tag{3}$$

или

$$\left(\frac{Xl'_1}{m_x \cdot r}\right)^2 + \left(\frac{Yl'_2}{m_y \cdot r}\right)^2 + \left(\frac{Zl'_3}{m_z \cdot r}\right)^2 = 1. \tag{4}$$

Это уравнение трехосного эллипсоида. Следовательно, при преобразованиях пространственных координат из ортогональной аффинной системы в аналогичную сфера преобразуется в эллипсоид с полуосями $a = m_x \cdot r$, $b = m_y \cdot r$ и $c = m_z \cdot r$. Центр эллипсоида совпадает с началом, а полуоси — с осями координат. По известным масштабам m_x, m_y, m_z и радиусу сферы r легко построить этот эллипсоид, который будем называть «эллипсоидом искажений».

Определим линейные искажения, вызываемые таким преобразованием систем координат. Из формулы (3) получим

$$(Xl'_1)^2 = r^2 m_x^2 + \frac{m_x^2}{m_y^2}(Yl'_2)^2 - \frac{m_x^2}{m_z^2}(Zl'_3)^2. \tag{5}$$

Тогда расстояние от центра эллипсоида 0 до данной точки P на его поверхности можно выразить так:

$$m_{ij}^2 r^2 = (Xl'_1)^2 + (Yl'_2)^2 + (Zl'_3)^2 = r^2 m_x^2 - \frac{m_x^2}{m_y^2}(Yl'_2)^2 - \\ - \frac{m_x^2}{m_z^2}(Zl'_3)^2 + (Yl'_2)^2 + (Zl'_3)^2. \tag{6}$$

---

* Ортогональной аффинной системой координат называется прямоугольная система координат, имеющая разные орты [3].

После простых преобразований запишем

$$m_{ij}^2 = m_x^2 + (m_y^2 - m_x^2)\left(\frac{Yl'_2}{m_y \cdot r}\right)^2 + (m_z^2 - m_x^2)\left(\frac{Zl'_3}{m_z \cdot r}\right)^2, \qquad (7)$$

или

$$m_{ij}^2 = m_x^2 + (m_y^2 - m_x^2)\left(\frac{Yl_2}{r}\right)^2 + (m_z^2 - m_x^2)\left(\frac{Zl_3}{r}\right)^2. \qquad (8)$$

Учитывая, что $\frac{Yl_2}{r} = \cos\beta$, а $\frac{Zl_3}{r} = \cos\gamma$ (направляющие косинусы), получаем

$$m_{ij} = \sqrt{m_x^2 + (m_y^2 - m_x^2)\cos^2\beta + (m_z^2 - m_x^2)\cos^2\gamma}. \qquad (9)$$

Для ортогональных систем координат сумма квадратов направляющих косинусов $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. С учетом этого формула (9) легко преобразуется к виду

$$m_{ij} = \sqrt{m_x^2\cos^2\alpha + m_y^2\cos^2\beta + m_z^2\cos^2\gamma}. \qquad (10)$$

С помощью этой формулы можно определить масштаб по любому направлению, если известны его направляющие косинусы и масштабы по осям координат.

Анализ формул (9) и (10) показывает, что m_{ij} не может быть больше наибольшего из масштабов m_x, m_y, m_z и меньше наименьшего из них.

Доказательство. Расстояние $m_{ij}r$ от центра 0 до любой точки поверхности эллипсоида искажений не может быть больше наибольшей полуоси a и меньше его наименьшей полуоси c, т. е.

$$a \geqslant m_{ij}r \geqslant c. \qquad (11)$$

Разделив все члены неравенства на радиус r, получим

$$\frac{a}{r} \geqslant m_{ij} \geqslant \frac{c}{r} \text{ или } m_{\max} \geqslant m_{ij} \geqslant m_{\min}. \qquad (12)^*$$

На плоскости при аффинном преобразовании можно по заданному масштабу m_{ij} определить направление, к которому относится данный масштаб. Чтобы показать это, запишем равенство

$$m_{ij}^2 = m_x^2\cos^2\alpha + m_y^2\cos^2\beta = m_x^2\cos^2\alpha + m_y^2\sin^2\alpha, \qquad (13)$$

где α — угол между осью OX и заданным направлением. Отсюда

$$m_{ij}^2 = m_x^2\cos^2\alpha - m_y^2\cos^2\alpha + m_y^2, \qquad (14)$$

---

* Если $m_{\text{мин}} = m_{\text{макс}}$, то эллипсоид искажений превращается в шар, что соответствует преобразованию подобия.

и из формулы (14) получаем

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{m_{ij}^2 - m_y^2}{m_x^2 - m_y^2}}. \tag{15}$$

В отличие от пространства двух измерений, в трехмерном пространстве мы не можем указать направление, вдоль которого масштаб равен m_{ij}, так как при этом из одного уравнения (9) нужно найти два неизвестных γ и β. Пусть даны масштабы m_x, m_y, m_z и m_{ij}. Тогда из выражений (9) получим

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{(m_{ij}^2 - m_x^2) - (m_z^2 - m_x^2)\cos^2\gamma}{m_y^2 - m_x^2}}. \tag{16}$$

Уравнение (16) показывает зависимость между $\cos\beta$ и $\cos\gamma$. Разные углы γ и β определяют разные направления, являющиеся образующими поверхности второго порядка. Установим тип этой поверхности. Пусть задан эллипсоид искажений с полуосями $a = m_x$, $b = m_y$, $c = m_z$ и из центра эллипсоида описана сфера радиусом

$$m_{ij} = \sqrt{m_x^2\cos^2\alpha + m_y^2\cos^2\beta + m_z^2\cos^2\gamma}.$$

Примем $m_{\text{макс}} > m_{ij} > m_{\text{мин}}$. Тогда сфера пересекает эллипсоид по кривой второго порядка. Соединив точки кривой с центром эллипсоида, получим коническую поверхность, вдоль образующих которой масштаб равен m_{ij}. Если эллипсоид искажений превращается в сферу, т. е. если $m_x = m_y = m_z$, то она во всех точках будет касаться сферы радиуса m_{ij}. В этом случае по всем направлениям масштаб постоянен и равен m_{ij}.

Для практических вычислений искажений удобнее применять формулу А. В. Буткевича, приведенную без вывода в работе [1],

$$m_{ij} - 1 = \frac{\cos\alpha_{ij}\cdot d(\Delta X) + \cos\beta_{ij}\cdot d(\Delta Y) + \cos\gamma_{ij}\cdot(\Delta Z)}{S_{ij}}, \tag{17}$$

где $d(\Delta X)$, $d(\Delta Y)$, $d(\Delta Z)$ — изменения превращений координат; S_{ij} — расстояние между пунктами P_i и P_j. Эту формулу можно получить следующим образом. Очевидно,

$$m = \frac{S'}{S} = \frac{S + dS}{S} = 1 + \frac{dS}{S}, \tag{18}$$

где

$$S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} = f(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z). \tag{19}$$

После дифференцирования формулы (19) получаем выражение

$$dS = \frac{\Delta X\cdot d(\Delta X) + \Delta Y\cdot d(\Delta Y) + \Delta Z\cdot d(\Delta Z)}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}}, \tag{20}$$

которое легко преобразуется к виду

$$dS = \cos\alpha \cdot d(\Delta X) + \cos\beta \cdot d(\Delta Y) + \cos\gamma \cdot d(\Delta Z), \qquad (21)$$

где

$$\cos = \frac{\Delta X}{S}; \quad \cos\beta = \frac{\Delta Y}{S}; \quad \cos\gamma = \frac{\Delta Z}{S}.$$

После подстановки выражения (21) в (18) получаем формулу (17).

Формула (17) действует при изменениях координат до 500—1000 м. Чтобы повысить ее точность, нужно при больших изменениях координат более строго вычислять направляющие косинусы. Для этого запишем

$$S'^2 - S^2 = \Delta X'^2 - \Delta X^2 + \Delta Y'^2 - \Delta Y^2 + \Delta Z'^2 - \Delta Z^2. \qquad (22)$$

Эта формула легко преобразуется к виду

$$(S'-S)(S'+S) = (\Delta X'+\Delta X)(\Delta X'-\Delta X) + (\Delta Y'+\Delta Y)(\Delta Y'-\Delta Y) + (\Delta Z'+\Delta Z)(\Delta Z'-\Delta Z). \qquad (23)$$

Отсюда

$$(S'-S) = \Delta S = \cos\alpha_{\text{ср}}(\Delta X'-\Delta X) + \cos\beta_{\text{ср}}(\Delta Y'-\Delta Y) + \cos\gamma_{\text{ср}}(\Delta Z'-\Delta Z), \qquad (24)$$

где введены «средние» направляющие косинусы:

$$\cos\alpha_{\text{ср}} = \frac{\Delta X' + \Delta X}{S' + S}; \quad \cos\beta_{\text{ср}} = \frac{\Delta Y' + \Delta Y}{S' + S}; \quad \cos\gamma_{\text{ср}} = \frac{\Delta Z' + \Delta Z}{S' + S}.$$

С учетом (24) формула (18) примет вид

$$m_{ij} - 1 = \frac{\cos\alpha_{\text{ср}}(\Delta X'-\Delta X) + \cos\beta_{\text{ср}}(\Delta Y'-\Delta Y) + \cos\gamma_{\text{ср}}(\Delta Z'-\Delta Z)}{S}. \qquad (25)$$

При больших разностях приращений координат $d(\Delta X)$, $d(\Delta Y)$, $d(\Delta Z)$ (порядка километров) удобнее применять известную из аналитической геометрии формулу (4)

$$m_{ij} = \sqrt{\frac{(X_i' - X_j')^2 + (Y_i' - Y_j')^2 + (Z_i' - Z_j')^2}{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}}. \qquad (26)$$

Как показывает опыт вычислений, для квазиогеоцентрических систем координат при $d(\Delta X)$, $d(\Delta Y)$, $d(\Delta Z)$ порядка 100—500 м, формула (17) дает достаточно строгие результаты (см. вычисления, приведенные в таблице).

Таким образом, при ортогональных аффинных преобразованиях линейные искажения достаточно полно характеризуются эллипсоидом искажений. На плоскости можно указать направление, вдоль которого масштаб равен m_{ij}, а в пространстве можно указать лишь конус, вдоль образующих которого линей-

Сводка масштабов m_{ij}^{-1}
по формулам (10), (17), (26)*

Линия	$m_{ij}-1$		
	(10)	(17)	(26)
$P_1—P_2$	$—25\cdot10^{-7}$	$—25\cdot10^{-7}$	$—25\cdot10^{-7}$
$P_2—P_3$	$— 8\cdot10^{-7}$	$— 7\cdot10^{-7}$	$— 8\cdot10^{-7}$
$P_3—P_4$	$— 4\cdot10^{-7}$	$— 4\cdot10^{-7}$	$— 4\cdot10^{-7}$
$P_4—P_5$	$— 9\cdot10^{-7}$	$— 9\cdot10^{-7}$	$— 9\cdot10^{-7}$
$P_5—P_6$	$—17\cdot10^{-7}$	$—17\cdot10^{-7}$	$—17\cdot10^{-7}$
$P_6—P_1$	$—22\cdot10^{-7}$	$—22\cdot10^{-7}$	$—22\cdot10^{-7}$

* Индексами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 обозначены пункты 5735, 5911, 5912, 5931, 6006, 6013, разности координат которых взяты из работы [7].

ный масштаб равен m_{ij}. При связи квазигеоцентрических систем координат линейные искажения удобно вычислять по формулам (17) или (25).

Список литературы: 1. *Буткевич А. В., Кириллов В. Г.* Определение вида линейного трансформирования пространственных прямоугольных координат. — Геодезия и картография, 1978, № 4. 2. *Каврайский В. В.* Избранные труды, т. 2, вып. 1. Л., Изд-во Управления гидрографической службы, 1958. 3. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Наука, 1965. 4. *Мусхелишвили Н. И.* Курс аналитической геометрии. М., Высшая школа, 1967. 5. *Baetsle P. L.* Conformal transformation in three dimensions. — Photogrammetric Engineering, 1965, № 5. 6. *Czarnecki A.* Transformacja przestreenja w pewnych zadaniach geodezji satelitarnej. — Geodezja i kortografia, 1972, № 2. 7. *Muller I. I.* Global satellite triangulation and trilateration results. — I. Geophys. Res., 1974, 79, № 35. 8. *Rysz I.* Transformacja affiniczna wspólrzędnych w-g metody najmniejszych kwadratów. — Geodezja i kartografia, 1970, № 2.

Работа поступила 29 марта 1978 года. Рекомендована кафедрой геологии и разработки месторождений полезных ископаемых Кадиевского филиала Коммунарского горно-металлургического института.