

**СРАВНЕНИЕ ВАРИАНТОВ И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО
ПРИ АЗИМУТАЛЬНОЙ ЗАСЕЧКЕ**

Азимутальными называют засечки, дирекционные углы направлений которых измерены непосредственно. При разработке проекта такой засечки ее конфигурация и количество измеряемых направлений определяются заданной точностью положения вставляемой точки. Оптимальную схему засечки можно установить путем сравнения вариантов. В статье предложен простой способ такого сравнения, обладающий наглядностью, максимумом информации и не требующий громоздких вычислений. Он основан на построении подеры, преимущества применения которой показаны в работах [2, 3].

В работе [2] были выведены формулы оценки точности многократной азимутальной засечки. Эти формулы при равноточном измерении дирекционных углов могут быть приведены к виду:

$$m_x^2 = \frac{[BB]}{[AA][BB] - [AB]^2} m_\alpha^2; \quad m_y^2 = \frac{[AA]}{[AA][BB] - [AB]^2} m_\alpha^2;$$

$$M^2 = \frac{[AA] + [BB]}{[AA][BB] - [AB]^2} m_\alpha^2, \quad (1)$$

где m_x и m_y — средние квадратические ошибки координат вставляемой точки; m_α — средняя квадратическая ошибка измерения дирекционного угла; M — средняя квадратическая ошибка положения вставляемой точки:

$$A_i = \frac{\sin \alpha_i}{S_i} \rho; \quad B_i = \frac{\cos \alpha_i}{S_i} \rho; \quad \rho'' = 206265''.$$

Для определенной схемы засечки знаменатель в формулах (1) есть величина постоянная, не зависящая от направления координатных осей, а сумма $[AA] + [BB] = [q^2]$, где $q_i = \rho/S_i$ — градиент направления. Поэтому для определения полуосей подеры (максимума или минимума, например, m_x) достаточно исследовать на экстремум лишь числитель $[BB]$.

В результате таких исследований получены формулы для вычисления A_0 и B_0 — большой и малой полуосей подеры:

$$A_0^2 = \frac{[AA] + [BB] + \sqrt{([AA] - [BB])^2 + 4[AB]^2}}{2([AA][BB] - [AB]^2)} m_\alpha^2;$$

$$B_0^2 = \frac{[AA] + [BB] - \sqrt{([AA] - [BB])^2 + 4[AB]^2}}{2([AA][BB] - [AB]^2)} m_\alpha^2. \quad (2)$$

Формулы (2) использованы в дальнейшем для разработки графического способа построения подеры.

В общем случае ошибка M приобретает свое наименьшее значение, когда между дирекционными углами направлений засечки выполняется равенство

$$\sin 2\alpha_i [q^2 \cos 2\alpha] = \cos 2\alpha_i [q^2 \sin 2\alpha]. \quad (3)$$

Если градиенты направлений равны между собой, то условию равенства (3) удовлетворяют засечки, подеры которых трансформируются в окружность, т. е. $A_0 = B_0 = \frac{m_\alpha S}{\rho} \sqrt{\frac{2}{n}}$, где n — число направлений. Причем углы засечки должны быть равны между собой и составлять $180^\circ : n$ или $360^\circ : n$. В этом случае также выдерживаются одновременно условия $[AA] = [BB]$ и $[AB] = 0$. Подобный метод оптимизации можно использовать при проектировании, например, радиальных сетей, представляющих центральные системы из одинаковых равнобедренных треугольников.

Рассмотрим вопросы оптимизации при вставке точки в существующую сеть. В данном случае необходимо построить для возможных вариантов засечек их подеры и, сравнив последние, выбрать оптимальный. Поэтому задача сводится к разработке простого способа построения таких подер.

Построение подеры простой азимутальной засечки может осуществляться по методике, приведенной в работе [3] для прямой угловой засечки.

Для построения подеры многократной азимутальной засечки представим формулы для M , A_0 и B_0 в виде

$$M^2 = \frac{[q^2] m_\alpha^2}{N^2}; \quad A_0^2 = k \frac{M^2}{1+k}, \quad B_0^2 = \frac{M^2}{1+k}, \quad (4)$$

$$\text{где } N^2 = [AA][BB] - [AB]^2, \quad k = \frac{A_0^2}{B_0^2} = \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4N^2}{[q^2]}}\right)^2}{\frac{4N^2}{[q^2]}}.$$

Преобразуем выражение для N^2 с учетом того, что

$$[AA] = \frac{1}{2} ([q^2] - [q^2 \cos 2\alpha]); \quad [BB] = \frac{1}{2} ([q^2] + [q^2 \cos 2\alpha]);$$

$$[AB] = \frac{1}{2} [q^2 \sin 2\alpha],$$

$$\text{следовательно, } N^2 = \frac{1}{4} ([q^2]^2 - [q^2 \sin 2\alpha]^2 - [q^2 \cos 2\alpha]^2).$$

Обозначим $[q^2 \sin 2\alpha]^2 + [q^2 \cos 2\alpha]^2 = q_3^2$, где q_3^2 — замыкающая, получаемая в результате сложения на плоскости двойного угла квадратов градиентов направлений засечки. Тогда

$$N^2 = \frac{1}{4} \{ [q^2]^2 - (q_3^2)^2 \},$$

отсюда
$$M^2 = \frac{4m_\alpha^2}{[q^2]} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{q_3^2}{[q^2]}\right)^2}, \quad k = \frac{1 + \frac{q_3^2}{[q^2]}}{1 - \frac{q_3^2}{[q^2]}}. \quad (5)$$

При $q_3^2 = 0$ $k=1$ и подера трансформируется в окружность с радиусом $\frac{M}{\sqrt{2}}$, где $M = \frac{2m_\alpha}{\sqrt{[q^2]}}$.

В работе [2] было показано, что дирекционный угол большой оси подеры вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2[AB]}{[BB] - [AA]}. \quad (6)$$

С учетом коэффициентов A_i и B_i формула (6) примет вид

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{[q^2 \sin 2\alpha]}{[q^2 \cos 2\alpha]},$$

следовательно, дирекционный угол замыкающий q_3^2 равен двойному дирекционному углу большой оси подеры.

Т а б л и ц а 1

Вычисление градиентов

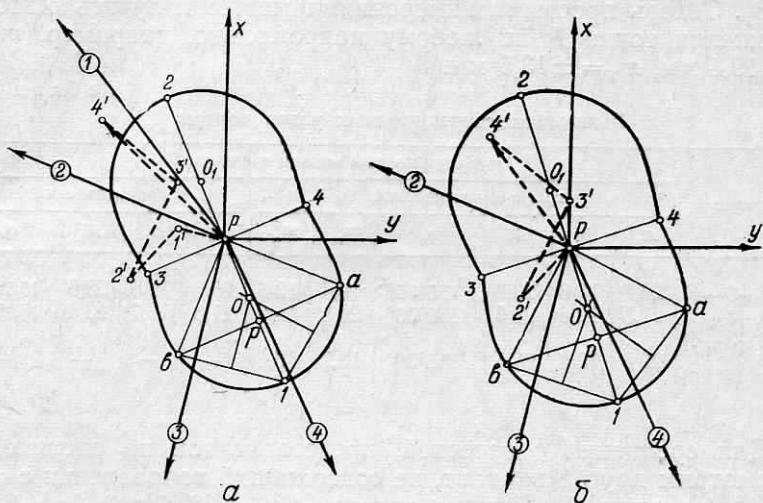
Направление	α_i , град	S_i , м	q_i , с/см	q_i^2	$2\alpha_i$, град
1	321	1800	1,15	1,32	282
2	291	1500	1,38	1,90	222
3	193	1200	1,72	2,96	26
4	154	1250	1,65	2,72	308

Таким образом, задача сводится к отысканию значений $[q^2]$ и q_3^2 , с помощью которых можно получить необходимые данные для построения подеры. Отметим, что предлагаемая ниже методика построения подеры многократной азимутальной засечки применима также и для многократной прямой угловой засечки.

Порядок сравнения вариантов многократной азимутальной засечки покажем на примере, который взят из работы [1].

Исходные данные приведены в табл. 1. Для получения результатов, сравнимых с результатами работы [1], примем $m_\alpha = \pm 3''$.

На плоскости двойного угла произведем известным способом сложение квадратов градиентов (см. рисунок, а) в масштабе 1:1. Отрезок $P4' = q_3^2 = 4,71 \text{ с}^2/\text{см}^2$. Дирекционный угол $P4'$ равен 313° , следовательно, дирекционный угол большой оси



Порядок построения подеры многократной азимутальной засечки.

подеры $156^\circ 30'$. По формулам (5) вычислим k и M , а по формулам (4) — A_0 и B_0 , причем для этих формул построим номограммы:

$$k = \frac{1 + \frac{4,71}{8,90}}{1 - \frac{4,71}{8,90}} = 3,24; \quad M^2 = \frac{4 \cdot 9}{8,90} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{4,71}{8,90}\right)^2} =$$

$$= 5,62 \text{ см}^2; \quad M = \pm 23,7 \text{ мм};$$

$$B_0^2 = \frac{5,62}{4,24} = 1,32 \text{ см}^2; \quad B_0 = \pm 11,6 \text{ мм};$$

$$A_0^2 = 3,24 \cdot 1,32 = 4,29 \text{ см}^2; \quad A_0 = \pm 20,7 \text{ мм}.$$

По вычисленным значениям A_0 , B_0 , M и φ_0 строим подеру следующим образом (см. рисунок, а). Через точку P проводим две взаимно перпендикулярные прямые, дирекционный угол одной из которых φ_0 .

Откладываем от точки P на соответствующих прямых отрезки, равные A_0 и B_0 в масштабе, например, 2:1, получаем точки 1, 2, 3 и 4. От точки P откладываем на большой полуоси отрезок,

равный $M/2$. Через полученную точку p проводим линию, перпендикулярную большой полуоси, до пересечения в точках a и b с двумя взаимно перпендикулярными прямыми, проходящими через точку P симметрично относительно большой полуоси. По точкам a , 1 и b находим центр окружности O . Дальнейшие построения осуществляются по методике, приведенной в работах [2, 3]. Теперь простыми измерениями можно получить ошибку положения точки P по любому направлению, например, $m_x = \pm 19,4$ мм, $m_y = \pm 13,5$ мм.

Т а б л и ц а 2

Вычисление дирекционных углов подеры

Вариант	Способы оценки точности									
	графо-аналитический						аналитический			
	A_0	B_0	M	φ_0	m_x	m_y	A_0	B_0	M	φ_0
(1—2—3—4)	20,7	11,6	23,7	156°30'	19,4	13,5	20,7	11,5	23,6	156°38'
(2—3—4)	21,5	12,6	25,0	162°00'	20,8	14,0	21,3	12,7	23,8	162°04'
(1—2—3—4) по [1]	20,8	10,4	23,1	156°30'	18,7	13,6	—	—	—	—

Для сравнения с засечкой, представленной на рисунке, а, рассмотрим другой вариант, не содержащий направления с $\alpha_1 = 321^\circ$ (рисунок, б). В этом случае $[q^2] = 7,58 \text{ с}^2/\text{см}^2$, $2\varphi_0 = 324^\circ$, $\varphi_0 = 162^\circ 00'$, $q_3^2 = 1 + \frac{3,69}{7,58} \text{ с}^2/\text{см}^2$:

$$k = \frac{1 + \frac{3,69}{7,58}}{1 - \frac{3,69}{7,58}} = 2,90; \quad M^2 = \frac{4 \cdot 9}{7,58} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{3,69}{7,58}\right)^2} =$$

$$= 6,22 \text{ см}^2, \quad M = \pm 25,0 \text{ мм};$$

$$B_0^2 = \frac{6,22}{3,90} = 1,60 \text{ см}^2; \quad B_0 = \pm 12,6 \text{ мм};$$

$$A_0^2 = 2,90 \cdot 1,60 = 4,63 \text{ см}^2; \quad A_0 = \pm 21,5 \text{ мм}.$$

По приведенной методике строим подеру, с помощью которой определяем $m_x = \pm 20,8$ мм, $m_y = \pm 14,0$ мм. Результаты сравнения вариантов, а также результаты аналитических расчетов по формулам (2), (6) и данные, полученные проф. Ф. Ф. Павловым [1], приведены в табл. 2.

Сравнивая ошибки положения вставляемой точки, полученные из различных вариантов засечки, можно обоснованно выбрать оптимальный. Так, сравнение вариантов на рисунке показывает, что они дают практически одинаковые результаты.

Предлагаемая методика оценки точности любой азимутальной засечки исключает построение инверсионной фигуры и вычисление площадей инверсионных треугольников [1], не требует построения подер простых засечек, составляющих многократную [2, 3], проста в исполнении и по точности идентична аналитическим способам.

Список литературы: 1. Павлов Ф. Ф. Предвычисление погрешностей в основных маркшейдерских работах. М., 1950. 2. Шеховцов Г. А. Графический способ оценки точности азимутальной засечки. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972, вып. 4. 3. Шеховцов Г. А. Построение подеры прямой угловой засечки. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27.

Работа поступила в редколлегию 24 октября 1977 года. Рекомендована кафедрой геодезии Горьковского инженерно-строительного института.