

УДК 528.931:519.21

Л. К. ВОИСЛАВСКИЙ, канд. техн. наук  
Харьковский институт инженеров коммунального строительства

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ КОНТУРОВ МЕСТНОСТИ НА ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТАХ

Рассмотрим криволинейный контур местности  $K$  (рис. 1). Чтобы отобразить его на карте или плане, даже в крупном масштабе  $1/M_0$ , достаточно выделить из бесконечного множества точек контура  $K$  подмножество  $K\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n\}$  так называемых характерных точек. Что же следует понимать под характерной точкой контура? Поскольку в практике съемочных работ понятие характерной точки связывают прежде всего с аппроксимацией криволинейного контура ломаной линией, определим сначала другое, на наш взгляд, не менее важное понятие — элементарный отрезок.

Элементарным отрезком назовем прямолинейный отрезок конечной длины  $[u_i, u_{i+1}]$ , у которого:

- а) концевые точки принадлежат контуру  $K(u_i, u_{i+1} \in K)$ ;
- б) все остальные точки в интервале  $[u_i, u_{i+1}]$  либо также принадлежат контуру  $K$ , либо расположены от него на расстоянии, меньшем некоторой наперед заданной величины  $\varepsilon$ , являющейся функцией масштаба  $1/M$ , т. е.

$$\max |\delta| < \varepsilon, \varepsilon = f(M). \quad (1)$$

Теперь характерные точки контура можно определить как множество вершин ломаной линии  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ , составленной из элементарных отрезков данного контура. Заметим, что процесс выделения характерных точек, как и всякое дискретное отображение непрерывного объекта, не является однозначным [4]. Следовательно, для одного и того же контура может существовать несколько подмножеств характерных точек, отвечающих сформулированным выше требованиям.

Как видно из рис. 1, положение характерной точки контура  $u_{i+1}$  относительно предшествующих ей точек  $u_{i-1}, u_i (i \geq 2)$  определяется углом поворота  $\Theta_i$  и длиной элементарного отрезка  $l_i$ . Условимся считать углы поворота  $\Theta$ , отклоняющие контур влево по ходу, отрицательными, а вправо — положительными.

Пусть какой-либо контур местности изображен на плане в крупном масштабе  $1/M_0$ , где  $M_0$  лишь несколько больше едини-

цы. Рази  
будет с.  
эксперим  
вательно  
дает сле  
1. Ве  
точек н  
участка  
данный

Это  
с одина

где  $\bar{l}$  —  
2. В  
точек н  
ко так  
отсутст  
3. В  
контур  
мала п  
(свойст  
Случ  
ми выш  
шим (и  
Число  
жутке

цы. Размещение характерных точек по длине контура в общем будет случайным. В качестве рабочей гипотезы, подлежащей экспериментальной проверке, допустим, что случайная последовательность характерных точек контура  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$  обладает следующими свойствами:

1. Вероятности появления того или иного числа характерных точек на участке контура длиной  $l$  зависят только от длины участка и не зависят от того, в каком месте контура расположен данный участок (свойство стационарности).

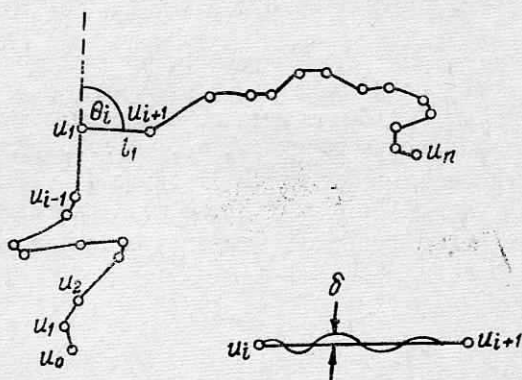


Рис. 1. Аппроксимация криволинейного контура ломаной линией.

Это значит, что характерные точки распределены по контуру с одинаковой средней плотностью

$$\lambda = 1/\bar{l}, \quad (2)$$

где  $\bar{l}$  — средняя длина элементарного отрезка.

2. Вероятность появления того или иного числа характерных точек на данном промежутке контура не зависит от того, сколько таких точек было до начала этого промежутка (свойство отсутствия последствия).

3. Вероятность появления на бесконечно малом промежутке контура  $\Delta l$  двух или более характерных точек пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одной точки (свойство ординарности).

Случайную последовательность, обладающую перечисленными выше свойствами, в теории вероятностей называют простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком событий [1]. Число характерных точек  $m$ , появляющихся на любом промежутке контура длиной  $l$ , распределено по закону Пуассона

$$P_m = \frac{(\lambda l)^m}{m!} e^{-\lambda l}. \quad (3)$$

Длина элементарных отрезков контура распределена по показательному закону с плотностью вероятностей

$$f(l) = \lambda e^{-\lambda l}. \quad (4)$$

При переходе от крупного масштаба  $1/M_0$  к более мелким в процессе генерализации произойдет своеобразное «просеивание» последовательности  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ . Часть точек не отобразится на плане или карте в масштабе  $1/M_i$  ( $M_i > M_0$ ), поскольку:

1. Элементарный отрезок окажется настолько малым, что характерные точки станут практически неразличимы и сольются в одну.

2. Отклонение характерной точки от прямой, соединяющей соседние точки, обусловленное углом поворота  $\Theta$  (рис. 1), как следует из формулы (1), будет меньше  $\epsilon$ . В результате получаем новую последовательность точек  $u'_0, u'_1, u'_2, \dots, u'_m$ , которая по своим свойствам напоминает поток Эрланга [1]. Для последовательности  $u'_0, u'_1, \dots, u'_m$ , в отличие от простейшего потока, длина элементарных отрезков имеет гамма-распределение с плотностью вероятностей

$$f(l) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} l^{\alpha-1} e^{-\lambda l}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — параметр распределения;  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция Эйлера. Параметр  $\alpha$  характеризует степень обобщения генерализованного изображения контура. Это значит, что в среднем из каждых  $\alpha$  точек простейшего потока в процессе генерализации оставлена только одна, а остальные выброшены.

Следовательно, теоретически установлен закон распределения элементарных отрезков. Чтобы получить аналогичный закон для углов поворота, также являющихся случайными величинами, в качестве рабочей гипотезы, подлежащей экспериментальной проверке, сформулируем свойства последовательности  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ :

1. Абсолютное значение угла поворота практически не зависит от длины соответствующего элементарного отрезка (свойство независимости).

2. Угол поворота по абсолютному значению не может быть больше  $180^\circ$  (свойство ограниченности).

3. У разомкнутых контуров положительные и отрицательные углы поворота встречаются одинаково часто (свойство равновероятности).

4. Малые по абсолютному значению углы поворота встречаются чаще, чем большие (свойство унимодальности).

5. У разомкнутых контуров среднее арифметическое значение угла поворота в пределе стремится к нулю (свойство компенсации).

Заметим, что свойства 3, 4, 5 можно легко распространить на любые контуры, включая и замкнутые, если углы поворота

заменить центрированными случайными величинами  $\Theta_i = \Theta_i - \bar{\Theta}$ , где  $\bar{\Theta}$  — среднее значение угла поворота для данного контура.

На основании свойств 2, 3, 4, 5 можно сделать вывод, что углы поворота должны быть распределены по нормальному закону, т. е.

$$f(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\Theta - \bar{\Theta})^2}{2\sigma^2}}, \quad (6)$$

где среднее квадратичное отклонение  $\sigma$  характеризует извилистость контура.

Чтобы проверить, как согласуются с действительностью изложенные выше теоретические положения, нами исследовано фактическое распределение элементарных отрезков и углов поворота у 26 различных контуров общей протяженностью свыше 240 км, изображенных на топографических картах (планах) в масштабах 1 : 2000, 1 : 10 000, 1 : 25 000, 1 : 50 000 и 1 : 100 000. На исследуемых изображениях контуров намечены характерные точки, всего около 2800 точек. Прямоугольные координаты характерных точек  $(x, y)$  определены по карте с точностью до 0,1 мм. Длины элементарных отрезков  $l$  и углы поворота  $\Theta$  вычислены на ЭВМ по графическим координатам. Параметры  $\lambda$  и  $\alpha$  найдены из формул [3].

$$\lambda = \frac{\bar{l}}{s^2}; \quad \alpha = \bar{l}\lambda, \quad (7)$$

где

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n l_i^2}{n} - \bar{l}^2}.$$

Здесь  $s$  — среднее квадратичное отклонение  $l$ , а все остальные параметры вычислены по известным формулам математической статистики. Полученные результаты приведены в таблице. Проверка гипотез о законах распределения  $l$  и  $\Theta$  выполнена при помощи критерия согласия  $\chi^2$ .

Проведенный эксперимент позволил сделать следующие выводы:

1) значения критерия  $\chi^2$  в 21 случае для элементарных отрезков и в 23 случаях для углов поворота оказались меньше критических, соответствующих 5%-ному уровню значимости. В остальных 8 выборках (5 элементарных отрезков и 3 углы поворота) получены значения  $\chi^2$  меньше критических при 1%-ном уровне значимости. Отсюда можно констатировать удовлетворительное согласие фактических распределений величин  $l$  и  $\Theta$  с теоретическими;

Характеристики распределения элементарных отрезков и углов поворота у различных контуров, изображенных на топографических картах

Номер контура	Наименование контура	Длина контура, км	Число характерных точек	Коэффициент корреляции $r$ ( $r$ )	$\sigma$ ( $r$ )	Элементарные отрезки				Углы поворота				
						средняя длина $\bar{L}$ , м	$\lambda$ , точек/км	$\alpha$	критерий $\chi^2$	число степеней свободы	средний угол $\theta$ , рад	среднее квадратическое отклонение $\sigma$ , рад	критерий $\chi^2$	число степеней свободы
12	Грунтовая дорога	2,0	54	0,14	0,13	37,9	67,0	2,53	2,6	2	0	0,19	5,2	4
4	"	5,1	73	-0,09	0,12	70,4	25,0	1,76	2,6	2	0,03	0,29	3,7	5
9А	"	7,4	76	-0,23	0,11	98,7	14,0	1,38	10,0	4	-0,03	0,56	10,1	5
9Б	"	9,2	78	0,35	0,10	119,6	16,8	2,01	7,0	2	-0,05	0,63	6,7	6
17А	"	20,3	97	-0,09	0,10	211,9	8,2	1,76	4,5	6	0	0,44	12,9	7
17	"	30,6	95	-0,12	0,10	325,0	6,5	2,12	2,6	4	0,07	0,66	11,2	4
11	Шоссейная дорога	23,8	116	-0,14	0,09	206,7	6,5	1,35	3,9	2	0	0,25	13,0	7
3	Лесной массив	4,2	82	0,15	0,11	51,1	55,7	2,84	7,8	5	0,05	0,94	4,7	6
8	"	5,0	203	0,16	0,07	24,9	76,4	1,90	5,8	5	-0,03	0,79	9,1	3
10	"	7,8	195	0,15	0,07	40,0	38,6	1,54	9,0	5	-0,02	0,99	12,6	5
8А	"	5,1	108	0,12	0,09	47,6	44,0	2,10	7,1	4	-0,06	1,15	7,3	7
10А	"	8,0	144	0,10	0,08	55,8	62,6	3,49	4,6	5	-0,02	1,24	4,9	5
8Б	"	3,5	47	-0,07	0,15	76,2	50,8	3,86	1,1	3	0,08	1,15	3,9	4
10Б	"	6,9	81	-0,11	0,11	86,0	33,8	2,91	7,1	3	-0,06	0,99	4,3	7
18А	"	21,6	168	0,21	0,07	129,0	12,0	1,55	10,8	3	-0,05	1,04	9,9	6
18	"	20,7	96	0,22	0,10	217,7	7,6	1,65	9,1	5	-0,07	1,11	6,4	7
14	Ручей	2,1	68	-0,22	0,11	30,8	140	4,31	10,2	4	0	0,54	5,8	7
15	"	1,7	63	-0,21	0,12	26,8	242	6,50	2,9	5	-0,01	0,34	5,0	5
6	Река	3,5	139	-0,08	0,08	25,6	162	4,14	6,0	5	-0,02	0,60	10,4	4
1	"	6,0	193	0,01	0,07	31,0	119	3,70	5,4	4	-0,04	0,79	4,8	7
5	"	3,9	128	-0,28	0,08	30,9	47,7	1,47	8,1	5	0	0,50	11,6	7
5А	"	5,3	90	-0,34	0,09	59,3	44,9	2,66	5,4	4	0,01	0,70	11,5	7
5Б	"	7,0	90	0,37	0,09	78,4	45,7	3,58	8,2	3	0	0,71	12,2	7
16А	"	13,5	168	-0,17	0,07	81,0	43,8	3,55	4,7	4	0	0,72	10,5	7
16	"	13,3	91	0,01	0,10	147,9	27,7	4,10	7,8	5	-0,01	0,65	8,4	7
7	Озеро	2,5	101	-0,14	0,10	25,1	148	3,72	1,3	5	-0,05	0,48	4,4	5

2) у 22 контуров из 26 коэффициент корреляции  $r(l, |\Theta|)$  оказался меньше  $3\sigma(r)$ , где

$$\sigma(r) = \frac{1 - [r(l, |\Theta|)]^2}{\sqrt{n}}$$

среднеквадратическое отклонение коэффициента корреляции выборки объемом  $n$  [2]. Для остальных четырех выборок, из которых три принадлежат изображению одного и того же кон-

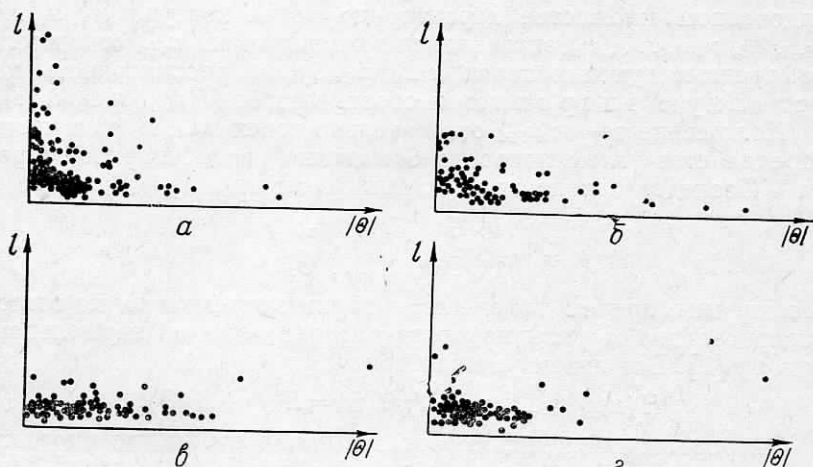


Рис. 2. Рассеивание пар случайных величин  $l$  и  $|\Theta|$ :  
 $ar(l, |\Theta|) = -0,28$ ;  $br(l, |\Theta|) = -0,37$ ;  $vr(l, |\Theta|) = 0,34$ ;  $gr(l, |\Theta|) = 0,35$ .

тура в разных масштабах, на рис. 2 точками показано рассеивание точек с координатами  $l$  и  $|\Theta|$ . Как видим, и здесь трудно обнаружить их сколь-либо существенную связь.

Таким образом, случайные величины  $l$  и  $|\Theta|$ : а) имеют разные законы распределения вероятностей; б) не коррелированы; в) не обнаруживают каких-либо других признаков, которые бы указывали на взаимозависимость. Это дает нам основание предположить, что величины  $l$  и  $|\Theta|$  независимы.

Результаты эксперимента в основном подтверждают выдвинутые нами гипотезы о размещении характерных точек и распределении углов поворота.

Список литературы: 1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1963. 2. *Гайдаев П. А., Большаков В. Д.* Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1969. 3. *Румицкий Л. З.* Элементы теории вероятностей. М., Наука, 1970. 4. *Хорафас Д. Н.* Системы и моделирование. М., Мир, 1967.

Работа поступила в редколлегию 14 ноября 1977 года. Рекомендована кафедрой геодезии Харьковского института инженеров коммунального строительства.