УДК 528.14/16.681.3

И. И. МОНИН
Львовский политехнический институт

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УРАВНЕННЫХ СТОРОН И УГЛОВ В РЯДЕ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Рассмотрим ряд треугольников с измеренными сторонами, в котором в начале и в конце имеется по два жестких пункта с известными координатами (рисунок). В этом ряду возникают три условные уравнения: дирекционных углов и два координатных.

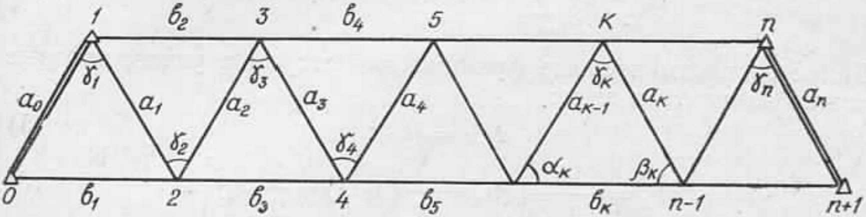

Схема сети трилатерации.

§ 1. Получим формулы для определения средних квадратических ошибок уравненных сторон и углов в случае, когда ряд треугольников трилатерации уравнен только за условие дирекционных углов. Составим условное уравнение дирекционных углов.

Выбрав ходовую линию так, как в триангуляции, легко записать

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\gamma_i) + w_\gamma = 0. \qquad (1)$$

Известно, что зависимость между поправкой в угол и поправками в стороны произвольного треугольника выражается формулой

$$(\gamma_k) = \frac{\rho}{h_{b_k}} [(b_k) - (a_{k-1}) \cos \alpha_k - (a_k) \cos \beta_k]. \qquad (2)$$

В случае равностороннего треугольника эта формула принимает вид

$$(\gamma_k) = \frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\left[(b_k) - \frac{1}{2}(a_{k-1}) - \frac{1}{2}(a_k)\right]. \qquad (3)$$

Подставляя выражение (3) в формулу (1), легко получить:

$$-(\gamma_1) = -\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\left[(b_1) - \frac{1}{2}(a_0) - \frac{1}{2}(a_1)\right];$$

$$+(\gamma_2) = \frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\left[(b_2) - \frac{1}{2}(a_1) - \frac{1}{2}(a_2)\right];$$

$$-(\gamma_3) = -\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\left[(b_3) - \frac{1}{2}(a_2) - \frac{1}{2}(a_3)\right];$$

$$(-1)^n(\gamma_n) = (-1)^n\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\left[(b_n) - \frac{1}{2}(a_{n-1}) - \frac{1}{2}(a_n)\right].$$

Выполнив суммирование, найдем условное уравнение дирекционных углов

$$\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(b_i) + w_\gamma = 0. \qquad (4)$$

Далее составим весовые функции для сторон и углов, которые можно записать в виде:

$$dF_S = (b_k); \qquad (5)$$

$$dF_\gamma = \frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\left[(b_k) - \frac{1}{2}(a_{k-1}) - \frac{1}{2}(a_k)\right]. \qquad (6)$$

Найдем обратные веса функции уравненных сторон и углов, учитывая уравнение дирекционных углов,

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]}. \qquad (7)$$

Для простоты вычислений составим таблицу коэффициентов условного уравнения и весовых функций (табл. 1). Теперь вычисляем алгоритмы Гаусса в формуле (7):

1. Для сторон:

$$[aa] = \left(\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\right)^2 n; \quad [af]^2 = \left(\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\right)^2;$$

$$\frac{1}{P_s} = 1 - \frac{\left(\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\right)^2 n} = 1 - \frac{1}{n}; \quad m_s = \mu\sqrt{1 - \frac{1}{n}}. \qquad (8)$$

Таблица 1

Коэффициенты условного уравнения и функций

Поправки	Условное уравнение дирекционных углов	Весовая функция сторон	Весовая функция углов
(a_1)	—		
(b_1)	$-\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$		
(a_2)	—		
(b_2)	$+\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$		
(a_{k-1})	—		$-\frac{\rho}{a\sqrt{3}}$
(b_{k-1})	$(-1)^{k-1}\times\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$		—
(a_k)	—		$-\frac{\rho}{a\sqrt{3}}$
(b_k)	$(-1)^{k}\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$	1	$\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$

2. Для углов:

$$[aa]=\left(\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\right)^2 n;\ [af]^2=\left(\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\right)^4;$$

$$[ff]=\frac{\rho^2}{3a^2}+\frac{4\rho^2}{3a^2}+\frac{\rho^2}{3a^2}=2\frac{\rho^2}{a^2};$$

$$\frac{1}{P_\gamma}=2\frac{\rho^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\right)^4}{\left(\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\right)^2 n}=\frac{2\rho^2}{a^2}\left(1-\frac{2}{3n}\right);\ m_\gamma=\mu\frac{\rho}{a}\sqrt{2-\frac{4}{3n}},\quad (9)$$

где μ — ошибка единицы веса — (погрешность измеренной стороны).

Таким образом, по формулам (8) и (9) вычисляем погрешности уравненных сторон и углов в ряде трилатерации с учетом условного уравнения дирекционных углов.

Пример. Предположим, что линия длиной 20 км, принадлежащая ряду треугольников трилатерации, измеряется с относительной ошибкой $\mu/a = 1:400\,000$. Подсчитываем ошибку уравненной стороны в случаях, когда ряд состоит из 14 и из 3 треугольников:

$$1)\ m_s = \frac{2\,000\,000}{400\,000}\sqrt{1-\frac{1}{14}} = 4{,}8\ \text{см},\ \mu = 5\ \text{см};$$

$$2)\ m_s = \frac{2\,000\,000}{400\,000}\sqrt{1-\frac{1}{3}} = 4{,}1\ \text{см}.$$

Теперь подсчитаем ошибку уравненного угла для тех же случаев:

$$1)\ m_\gamma = 206\,265''\sqrt{2-\frac{4}{3\times 14}}\times\frac{1}{400\,000} = 0'',71,\ m_\gamma = 0'',73;$$

$$2)\ m_\gamma = 206\,265''\sqrt{2-\frac{4}{3\times 3}}\times\frac{1}{400\,000} = 0'',64.$$

§ 2. Получим формулы для определения средних квадратических ошибок уравненных сторон и углов в случае, когда ряд треугольников трилатерации уравнен за все три условных уравнения.

Составим условные уравнения координат. Известно, что

$$\Delta x_{12} = a_{12}\cos\alpha_{12};\quad \Delta y_{12} = a_{12}\sin\alpha_{12}.$$

Продифференцировав первую формулу:

$$d\Delta x_{12} = da_{12}\cos\alpha_{12} - a_{12}\sin\alpha_{12}\,d\alpha_{12} = \frac{\Delta x_{12}}{a_1}(a_1) - \Delta y_{12}\,d\alpha_{12};$$

$$d\alpha_{12} = -(\gamma_1) = -\frac{2}{a\sqrt{3}}\left[(b_1) - \frac{1}{2}(a_0) - \frac{1}{2}(a_1)\right],$$

получим

$$d\Delta x_{12} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(a_1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(b_1).$$

Аналогично определим все остальные поправки в приращения Δx:

$$d\Delta x_{23} = \frac{2}{\sqrt{3}}(a_2) - \frac{1}{\sqrt{3}}(b_2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(b_1);$$

$$d\Delta x_{34} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(a_3) + \frac{1}{\sqrt{3}}(b_3) - \frac{1}{\sqrt{3}}(b_2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(b_1);$$

$$d\Delta x_{45} = +\frac{2}{\sqrt{3}}(a_4) - \frac{1}{\sqrt{3}}(b_4) + \frac{1}{\sqrt{3}}(b_3) - \frac{1}{\sqrt{3}}(b_2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(b_1).$$

Просуммировав эти выражения, найдем

$$\sum_{i=1}^{n-1} d\Delta x_{i,\,i+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{1}^{n-1} (-1)^i (a_i) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(-1)^i (b_i).$$

Теперь напишем условное уравнение x:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (a_i) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(-1)^i (b_i) + w_x = 0. \qquad (10)$$

Дифференцируя, как ранее, приращения Δy, получим:

$$d\Delta y_{12} = \frac{\Delta y_{12}}{a_1}(a_1) + \Delta x_{12}\, d\alpha_{12} = \frac{1}{2}(a_1) +$$

$$+ \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} \left[(b_1) - \frac{1}{2}(a_1)\right] = (b_1);$$

$$d\Delta y_{23} = -(b_1) + (b_2); \quad d\Delta y_{34} = +(b_1) - (b_2) + (b_3);$$

$$d\Delta y_{45} = -(b_1) + (b_2) - (b_3) + (b_4);$$

$$d\Delta y_{n-1,\,n} = -(b_1) + (b_2) - (b_3) + \cdots + (b_{n-1}).$$

Если n — четное ($n-1$ — нечетное), то

$$\sum_{i=1}^{n-1} d\Delta y = (b_1) + (b_3) + (b_5) + \cdots + (b_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (b_i). \qquad (11)$$

Если n — нечетное, то

$$\sum_{i=1}^{n-1} d\Delta y = (b_2) + (b_4) + (b_6) + \cdots + (b_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (b_i). \qquad (12)$$

Таким образом, условное уравнение y принимает вид:

$$(b_1) + (b_3) + (b_5) + (b_{n-1}) + w_y = 0; \qquad (11')$$

$$(b_2) + (b_4) + (b_6) + \cdots + (b_{n-1}) + w_y = 0. \qquad (12')$$

Далее составляем таблицу коэффициентов условных уравнений и весовых функций (табл. 2), чтобы вычислить алгоритмы Гаусса в формуле

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \frac{[cf\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}\,. \qquad (13)$$

Вычисляем алгоритмы Гаусса для оценки уравненных сторон в случае учета всех условных уравнений;

$$[ff] = 1; \quad [af]^2 = \frac{4\rho^2}{3a^2}; \quad [aa] = \frac{4\rho^2}{3a^2}\cdot n;$$

Таблица 2

Коэффициенты условных уравнений и весовых функций

Поправки	Уравнение дирекционных углов	Уравнение абсцисс	Уравнение ординат, n — четное	Уравнение ординат, n — нечетное	F_S	F_γ
(a_1)	—	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$				
(b_1)	$-\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$	$(n-1)\frac{1}{\sqrt{3}}$	1			
(a_2)	—	$+\frac{2}{\sqrt{3}}$				
(b_2)	$+\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$	$-(n-2)\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		
(a_3)	—	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$				
(b_3)	$-\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$	$(n-3)\frac{1}{\sqrt{3}}$	1			
(a_{k-1})	—	$(-1)^{k-1}\frac{2}{\sqrt{3}}$				$-\frac{\rho}{a\sqrt{3}}$
(b_{k-1})	$(-1)^{k-1}\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$	$(n-k+1)(-1)^{k-1}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$	1			—
(a_k)	—	$(-1)^{k}\frac{2}{\sqrt{3}}$				$-\frac{\rho}{a\sqrt{3}}$
(b_k)	$(-1)^{k}\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$	$-(n-k)(-1)^{k}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	1	$\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$

Поправки	Уравнение дирекционных углов	Уравнение абсцисс	Уравнение ординат, n—четное	Уравнение ординат, n—нечетное	F_S	F_γ
(a_{n-1})	—	$+(-1)^{n-1}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$				
(b_{n-1})	$(-1)^{n-1}\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$	$-(-1)^{n-1}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$	1			
(a_n)	—					
(b_n)	$(-1)^n\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}$					

$$[bb]=\frac{4}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\left[(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+2^2+1^2\right]=$$

$$=\frac{4}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{1};\quad [bf]=-(n-k)\frac{(-1]^k}{\sqrt{3}};$$

$$[ab]=-\frac{2\rho}{3a}\left[(n-1)+(n-2)+\cdots+1\right]=-\frac{\rho}{3a}n(n-1).$$

Для случая, когда n — четное:

$$[cc]=\frac{n}{2};\quad [bc]=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(n-1)+(n-3)+\right.$$

$$\left.+(n-5)+\cdots+1\right]=\frac{n^2}{4\sqrt{3}};\quad [cf]=0;\quad [ac]=-\frac{\rho\cdot n}{a\sqrt{3}};$$

$$[cf\cdot 1]=[cf]-\frac{[ac][af]}{[aa]}=0+\frac{\frac{\rho\cdot n}{a\sqrt{3}}(-1)^k\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}}{\frac{4\rho^2 n}{3a^2}}=(-1)^k\cdot\frac{1}{2};$$

$$[cc\cdot 1]=[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}=\frac{n}{2}-\left(\frac{\rho\cdot n}{a\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n}=\frac{n}{4};$$

$$[bf\cdot 1]=[bf]-\frac{[ab]\,[af]}{[aa]}=-(n-k)\,\frac{(-1)^k}{\sqrt{3}}+(-1)^k\,\frac{n-1}{2\sqrt{3}}=$$

$$=(-1)^k\,\frac{2k-n-1}{2\sqrt{3}}\,;$$

$$[bc\cdot 1]=[bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}=\frac{n^2}{4\sqrt{3}}-\frac{\rho\cdot n\,(n-1)}{3a}\times$$

$$\times\frac{\rho\cdot n}{a\sqrt{3}}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2\,n}=\frac{n}{4\sqrt{3}}\,;$$

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}=\frac{4}{3}(n-1)+\frac{1}{18}\,n\,(n-1)\,(2n-1)-$$

$$-\frac{1}{12}\,n\,(n-1)^2=\frac{1}{36}\,(n-1)\,(48+n^2+n)\,;$$

$$[cc\cdot 2]=[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=\frac{n}{4}-\frac{n}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{n}{4\sqrt{3}}\cdot$$

$$\cdot\frac{36}{(n-1)\,(48+n^2+n)}=\frac{n}{4}-\frac{3n^2}{4\,(n-1)\,(48+n^2+n)}\,;$$

$$[cf\cdot 2]=[cf\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=(-1)^k\,\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{n\,(-1)^k\,(2k-n-1)}{4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}\cdot\frac{36}{(n-1)\,(48+n^2+n)}=$$

$$=(-1)^k\cdot\frac{1}{2}\left[1-\frac{3n\,(2k-n-1)}{(n-1)\,(48+n^2+n)}\right];$$

$$\frac{1}{P_F}=1-\frac{4\rho^2}{3a^2}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2\cdot n}-\frac{36\,(2k-n-1)^2}{(n-1)\,(48+n^2+n)}-$$

$$-\frac{\frac{1}{4}\left[1-\frac{3n\,(2k-n-1)}{(n-1)\,(48+n^2+n)}\right]^2}{\frac{n}{4}\left[1-\frac{3n}{(n-1)\,(48+n^2+n)}\right]}=1-\frac{1}{n}-$$

$$-\frac{3\,(2k-n-1)^2}{(n-1)\,(48+n^2+n)}-\frac{\left[1-\frac{3n\,(2k-n-1)}{(n-1)\,(48+n^2+n)}\right]^2}{n\left[1-\frac{3n}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]}\,. \qquad (14)$$

Для случая, когда n — нечетное:

$$[ac]=\frac{\rho\,(n-1)}{a\sqrt{3}}\,;\quad [bc]=-\frac{(n-1)^2}{4\sqrt{3}}\,;\quad [af]=(-1)^k\,\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\,;$$

$$[bf] = -(-1)^k (n-k)\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad [cf] = 0; \quad [cc] = \frac{n-1}{2};$$

$$[bc\cdot 1] = -\frac{(n-1)^2}{4\sqrt{3}} + \frac{\rho n(n-1)}{3a}\cdot\frac{\rho(n-1)}{a\sqrt{3}}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = 0;$$

$$[cc\cdot 1] = \frac{n-1}{2} - \frac{\rho^2(n-1)^2}{3a^2}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = \frac{n^2-1}{4n};$$

$$[cf\cdot 1] = 0 - \frac{\rho(n-1)}{a\sqrt{3}}\cdot(-1)^k\cdot\frac{2\rho}{a\sqrt{3}}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = -(-1)^k\frac{n-1}{2n};$$

$$[bf\cdot 1] = -\frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^k(n-k) + \frac{\rho n(n-1)(-1)^k\cdot 2\rho}{3a\cdot a\sqrt{3}}\times$$

$$\times\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = \frac{(-1)^k}{2\sqrt{3}}(2k-n-1);$$

$$[bb\cdot 1] = \frac{1}{36}(n-1)(48+n^2+n); \quad [cc\cdot 2] = \frac{n^2-1}{4n} - 0 = \frac{n^2-1}{4n};$$

$$[cf\cdot 2] = 0-(-1)^k\frac{n-1}{2n} - 0 = -(-1)^k\frac{n-1}{2n};$$

$$\frac{1}{P_F} = 1 - \frac{4\rho^2}{3a^2}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} - \frac{(2k-n-1)^2}{4\cdot 3}\cdot\frac{36}{(n-1)(48+n^2+n)} -$$

$$-\frac{(n-1)^2}{4n^2}\cdot\frac{4n}{(n^2-1)} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{3(2k-n-1)^2}{(n-1)(48+n^2+n)} - \frac{n-1}{(n+1)\cdot n}. \tag{15}$$

Вычислим алгоритмы Гаусса для оценки уравненных углов в случае учета всех условных уравнений.

Для случая, когда n — четное:

$$[ff] = 2\frac{\rho^2}{a^2}; \quad [af] = (-1)^k\frac{4\rho^2}{3a^2}; \quad [ab] = -\frac{\rho}{3a}n(n-1);$$

$$[aa] = \frac{4\rho^2 n}{3a^2}; \quad [bb] = \frac{4}{3}(n-1) + \frac{1}{18}(n-1)(2n-1)n;$$

$$[bc] = \frac{n^2}{4\sqrt{3}}; \quad [bf] = -(-1)^k(n-k)\frac{2\rho''}{3a};$$

$$[cc] = \frac{n}{2}; \quad [cf] = 0;$$

$$[cf\cdot 1] = 0 + \frac{\rho\cdot n}{a\sqrt{3}}(-1)^k\frac{4\rho^2}{3a^2}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = (-1)^k\frac{\rho}{a\sqrt{3}};$$

$$[bf\cdot 1] = -(-1)^k (n-k)\frac{2\rho}{3a} + \frac{\rho\cdot n(n-1)}{3a}(-1)^k \frac{4\rho^2}{3a^2}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} =$$

$$= (-1)^k \frac{\rho}{3a}(2k-n-1);$$

$$[cc\cdot 1] = \frac{n}{2} - \frac{\rho^2 n^2}{3a^2}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = \frac{n}{4};$$

$$[bb\cdot 1] = \frac{4}{3}(n-1) + \frac{1}{18}(n-1)(2n-1)n - \frac{\rho^2 n^2 (n-1)^2}{9a^2}\times$$

$$\times\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = \frac{n-1}{36}(48+n^2+n);$$

$$[bc\cdot 1] = \frac{n^2}{4\sqrt{3}} - \frac{\rho\cdot n(n-1)}{3a}\cdot\frac{\rho\cdot n}{a\sqrt{3}}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = \frac{n}{4\sqrt{3}};$$

$$\frac{1}{P_\gamma} = 2\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{16\rho^4}{9a^4}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} - \frac{\rho^2(2k-n-1)^2\cdot 36}{9a^2(n-1)(48+n^2+n)} -$$

$$-\frac{\dfrac{\rho^2}{3a^2}\left[1-\dfrac{3n(2k-n-1)}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]^2}{\dfrac{n}{4}\left[1-\dfrac{3n}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]} =$$

$$= 2\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{4}{3}\frac{\rho^2}{a^2 n} - \frac{4\rho^2(2k-n-1)^2}{a^2(n-1)(48+n^2+n)} - \frac{4\rho^2}{3a^2 n}\times$$

$$\times\frac{\left[1-\dfrac{3n(2k-n-1)}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]^2}{\left[1-\dfrac{3n}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]}, \qquad (16)$$

В случае, когда n — нечетное, поменяются только некоторые алгоритмы:

$$[cc] = \frac{n-1}{2};\quad [bc] = -\frac{(n-1)^2}{4\sqrt{3}};\quad [ac] = \frac{\rho(n-1)}{a\sqrt{3}};$$

$$[cf\cdot 1] = 0 - \frac{\rho(n-1)}{a\sqrt{3}}\cdot(-1)^k\cdot\frac{4\rho^2}{3a^2}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = -(-1)^k\frac{\rho(n-1)}{a\sqrt{3}\cdot n};$$

$$[cc\cdot 1] = \frac{n-1}{2} - \frac{\rho^2(n-1)^2}{3a^2}\cdot\frac{3a^2}{4\rho^2 n} = \frac{n^2-1}{4n};$$

$$[bf\cdot 1] = -(-1)^k\cdot(n-k)\frac{2\rho}{3a} + (-1)^k\frac{4\rho^2\,\rho\cdot n(n-1)}{3a^2\cdot 3a}\,\frac{3a^2}{4\rho^2 n} =$$

$$= (-1)^k\frac{\rho}{3a}(2k-n-1);$$

$$[bc\cdot 1] = -\frac{(n-1)^2}{4\sqrt{3}} + \frac{\rho(n-1)\rho n(n-1)}{3\cdot a\cdot a\cdot\sqrt{3}} \times \frac{3a^2}{4\rho^2 n} = 0;$$

$$[bb\cdot 1] = \frac{4}{3}(n-1) + \frac{1}{18}(n-1)(2n-1)n - \frac{\rho^2 n^2 (n-1)^2}{9a^2}\;\frac{3a^2}{4\rho^2 n} =$$

$$= \frac{n-1}{36}\cdot(48+n^2+n);$$

$$[cc\cdot 2] = \frac{(n^2-1)}{4n} - 0 = \frac{n^2-1}{4n}; \quad [cf\cdot 2] = -(-1)^k \frac{\rho(n-1)}{a\sqrt{3}\cdot n};$$

$$\frac{1}{P_\gamma}\cdot\frac{a^2}{\rho^2} = 2 - \frac{16\cdot 3}{9\cdot 4\cdot n} - \frac{(2k-n-1)^2\cdot 36}{9(n-1)(48+n^2+n)} - \frac{(n-1)^2\cdot 4n}{3n^2(n^2-1)} =$$

$$= 2 - \frac{4}{3n} - \frac{4(2k-n-1)^2}{(n-1)(48+n^2+n)} - \frac{4(n-1)}{3(n+1)n}. \qquad (17)$$

В случае, когда n — нечетное, а k — четное, полученные формулы принимают следующий вид:

$$\frac{1}{P_s} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{3(n-2k+1)^2}{(n-1)(48+n^2+n)} - \frac{n+1}{n(n-1)}; \qquad (18)$$

$$\frac{1}{P_\gamma}\,\frac{a^2}{\rho^2} = 2 - \frac{4}{3n} - \frac{4(n-2k+1)^2}{(n-1)(48+n^2+n)} - \frac{4}{3n}\cdot\frac{n+1}{n-1}. \qquad (19)$$

Если же n — четное; а k — нечетное, то

$$\frac{1}{P_s} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{3(n-2k+1)^2}{(n-1)(48+n^2+n)} - \frac{\left[1-\frac{3n(n-2k+1)}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]^2}{n\left[1-\frac{3n}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]}; \qquad (20)$$

$$\frac{1}{P_\gamma}\cdot\frac{a^2}{\rho^2} = 2 - \frac{4}{3n} - \frac{4(n-2k+1)^2}{(n-1)(48+n^2+n)} - \frac{4}{3n} \times \frac{\left[1-\frac{3n(n-2k+1)}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]^2}{\left[1-\frac{3n}{(n-1)(48+n^2+n)}\right]}. \qquad (21)$$

Пример. Предположим, как и ранее, что линия длиной 20 км, принадлежащая ряду треугольников трилатерации, измеряется с относительной ошибкой $\frac{\mu}{a} = \frac{1}{400\,000}$.

Подсчитаем ошибку уравненной стороны в случаях, когда ряд состоит из 14 и 3 треугольников:

1) $$n = 14,\ k = 6;\quad \frac{1}{P_s} = 1 - \frac{1}{14} - \frac{3}{3354} - \frac{\left[1 + \frac{3\cdot 14}{3354}\right]^2}{14\left[1 - \frac{3\cdot 14}{3354}\right]} = 0{,}8535;$$

$$m_S = \pm\, 4{,}6\ \text{см};\quad \frac{1}{P_\gamma} = 1{,}8047;\quad m_\gamma = \pm\, 0'',69;$$

2) $$n = 3;\quad k = 1;\quad \frac{1}{P_s} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6} = 0{,}4;$$

$$m_s = \pm\, 3{,}2\ \text{см};\quad \frac{1}{P_\gamma} = \frac{\rho^2}{a^2}\cdot\frac{6}{5};\quad m_\gamma = \pm\, 0'',56.$$

Следовательно, формулы (8) и (9) определяют погрешности уравненных сторон и углов в ряде треугольников трилатерации, конечные стороны которого имеют известные дирекционные углы. Формулы (14) и (15) позволяют определять обратные веса тех же элементов с учетом всех полигонных условных уравнений, причем n и k надо брать четными. Если же n и k нечетные, то справедливы формулы (16) и (17). Все эти формулы, как и формулы (18)—(21), точные: при их выводе мы ничем не пренебрегаем. Отметим еще, что для связующих сторон формулы погрешностей несколько проще. Так, при четном n и k

$$\frac{1}{P_{a_k}} = 1 - \frac{48}{n^3 + 44\,n - 48}, \tag{22}$$

при нечетном n и k

$$\frac{1}{P_{a_k}} = 1 - \frac{48}{n^3 + 47\,n - 48}, \tag{23}$$

где a_k — связующая сторона в ряде треугольников. Можно получить формулы обратных весов и для связующих углов α_k или β_k. Однако выведенные здесь формулы довольно полно решают вопрос о погрешностях уравненных сторон и углов в ряде трилатерации.

Работа поступила 13 апреля 1978 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.