

УДК 528.35

П. И. ЕФИМОВ

## О ТОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ РЯДА ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНО ИЗМЕРЕННЫМИ СТОРОНАМИ

Ряды из геодезических четырехугольников используются при построении геодезического обоснования для производства маркшейдерских и геодезических работ, связанных с проектированием, строительством и эксплуатацией различных ответственных инженерных сооружений. Преимущества таких рядов по сравнению с рядами из треугольников хорошо известны и для свободных рядов они отражены в работе [1].

Повышения точности элементов ряда из геодезических четырехугольников при прочих равных условиях можно достичь дополнительными измерениями некоторых его связующих сторон ( $b$ ) и определением азимутов (дирекционных углов) этих сторон. Очевидно, дополнительные линейные измерения приведут в основном к уменьшению ошибок вычисленных длин сторон ряда и его продольного сдвига, а дополнительные азимутальные определения — к уменьшению ошибок вычисленных азимутов (дирекционных углов) его сторон и величины поперечного сдвига. Совместные дополнительные линейные измерения и азимутальные определения положительно скажутся на повышении точности элементов ряда во всей их совокупности.

Необходимо отметить, что вопрос о влиянии дополнительных линейных измерений и азимутальных определений тесно связан с оптимальным соотношением весов производимых угловых и линейных измерений, а также и азимутальных определений. Этот вопрос весьма сложен в теоретическом отношении и едва ли может быть решен в общем виде, так как указанное оптимальное соотношение весов является в частности функцией целого ряда геометрических особенностей данного построения: количества фигур его составляющих, их формы, изломанности ряда. Кроме того, решение вопроса зависит и от заданных величин средних квадратических ошибок тех или иных конкретных элементов ряда.

Так, если ориентироваться на получение минимальных и примерно равных между собой величин продольного и поперечного сдвигов ряда, то таким является ряд из геодезических квадратов или фигур, достаточно близких к ним, а точности угловых и линейных измерений и азимутальных определений должны быть близкими к условию вида

$$\frac{m_{\beta}''}{\rho''} = \frac{m_{\alpha}''}{\rho''} = \frac{m_b}{b}, \quad (1)$$

где  $m_{\beta}$ ,  $m_{\alpha}$  и  $m_b$  — средние квадратические ошибки угловых, азимутальных и линейных измерений и определений.

К такому заключению мы пришли, используя выведенные нами строгие формулы для определения величин, обратных весам продольного и поперечного сдвигов ( $1 : P_{t(2n+1)}$  и  $1 : P_{u(2n+1)}$ , конечных вершин рядов с различными продвигами ( $q=1,0$ ;  $q=1,5$  и  $q=2,0$ ) и с разным

числом фигур, составляющих ряд. Использовали разные комбинации соотношений точностей измерений при сохранении в любой комбинации равенства весов угловых измерений и азимутальных определений, то

$$\text{есть } \frac{m_3}{\rho''} = \frac{m_2}{\rho''} .$$

Формулы, на которые сделана выше ссылка, приведены в табл. 2.

Вопрос же о необходимом количестве дополнительных линейных измерений и азимутальных определений и месте их расположения в данном проектируемом ряду решается достаточно просто использованием предлагаемых расчетных формул, с учетом заданных конкретных величин средних квадратических ошибок тех или иных элементов ряда.

Вводим такие обозначения. Если вес измеренного угла принять за единицу, то  $P_a = m_\beta^2$ ;  $m_a^2$  и  $P_b = m_\beta^2$ ;  $m_b^2$ . В дальнейших выводах нас интересуют величины, обратные весам сторон и азимутов, которые обозначаем соответственно через  $q_b$  и  $q_a$ . Принимая далее, что  $\delta_B$  — изменение логарифма синуса угла, участвующего в передаче длины по ходовой линии построения при изменении величины самого угла на  $1''$  (на рисунке ходовая линия обозначена штрихом), а  $\Delta_B$  — изменение логарифма длины измеренной связующей стороны ряда при изменении ее длины на единицу измерения (мм, см, дм), вводим, кроме указанных, нужные величины:

$$\omega_b(k) = \Delta_{b(k)}^2 q_{b(k)} \text{ and } \omega_a(k) = q_{a(k)}.$$

При дополнительных измерениях связующих сторон ряда и определениях азимутов этих сторон в нем, кроме условий фигур и полюсов, возникает еще  $\lambda$  условий сторон и  $\lambda$  условий азимутов (дирекционных углов), причем  $\lambda$  — число частей ряда, на которое он разделился в результате дополнительных линейных измерений и азимутальных определений с  $n_i$  числом фигур в каждой части ряда.

Применимельно к обозначениям, использованным на рисунке, учитывая, что ряд состоит из прямоугольников, записываем условные уравнения фигур и полюсов в таком общем виде:

$$\left. \begin{aligned} (8n-7) + (8n-6) + (8n-5) + (8n-4) + w_1^{(n)} &= 0; \\ (8n-3) + (8n-2) + (8n-1) + 8n + w_2^{(n)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$(8n - 5) + (8n - 4) + (8n - 3) + (8n - 2) + w_3^{(n)} = 0; \quad (3)$$

$$\delta_{8n-7}(8n-6) + \delta_{8n+6}(8n-4) - \delta_{8n-7}(8n-3) - \delta_{8n-6}(8n+1) + w_n^{(n)} = 0. \quad (4)$$

Число уравнений вида (2) равно  $2n$ , а число уравнений вида (3) и (4) равно  $n$  ( $n$  — число фигур в ряду).

Что касается условных уравнений азимутов (дирекционных углов) и сторон, то эти уравнения следует записать так:

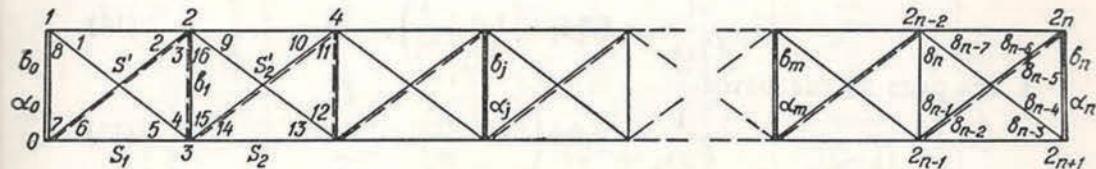
$$\left. \begin{aligned} (\alpha_0) + \sum_1^j \{(8j-1) - (8j-5)\} - (\alpha_j) + w_{\alpha_j} &= 0; \\ (\alpha_j) + \sum_{j+1}^l \{(8l-1) - (8l-5)\} - (\alpha_l) + w_{\alpha_l} &= 0; \\ \dots & \\ (\alpha_n) + \sum_{n+1}^m \{(8n-1) - (8n-5)\} - (\alpha_n) + w_{\alpha_n} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\Delta_{b_0}(b_0) + \sum_1^j \{\delta_{8j-2}(8j-2) - \delta_{8j-6}(8j-6)\} - \Delta_{b_j}(b_j) + w_{b_j} = 0;$$

$$\Delta_{b_j}(b_j) + \sum_{j+1}^l \{\delta_{8l-2}(8l-2) - \delta_{8l-6}(8l-6)\} - \Delta_{b_l}(b_l) + w_{b_l} = 0; \quad (6)$$

$$\Delta_{b_m}(b_m) + \sum_{m+1}^n \{\delta_{8n-2}(8n-2) - \delta_{8n-6}(8n-6)\} - \Delta_{b_n}(b_n) + w_{b_n} = 0.$$

Относим уравнения (3) — (6) ко второй группе условных уравнений и приписываем к ним весовые функции для вычисляемой связующей стороны или ее азимута (дирекционного угла) той или иной части ряда.



Ряд геодезических четырехугольников с дополнительно измеренными сторонами.

Сделав далее необходимые преобразования коэффициентов условных уравнений второй группы и соответствующей весовой функции, получаем формулу для определения величины, обратной весу азимута (дирекционного угла) вычисленной связующей стороны  $b$   $i$ -й части ряда в таком виде:

$$\frac{1}{P_{\alpha_k(i)}} = \omega_{\alpha_i} + k_i \left( 1,5 - \frac{k_i}{2n_i} \right) - \frac{\omega_{\alpha_i}^2}{\omega_{\alpha_{i-1}} + \omega_{\alpha_i} + 1,5 n_i} - \frac{(\omega_{\alpha_i} + k_i)^2}{\omega_{\alpha_i} + \omega_{\alpha_{i+1}} + n_i}. \quad (7)$$

При равенстве весов азимутальных определений и измерений углов в фигурах, пренебрегая третьим членом формулы (7), как не влияющим на результат вычисления по ней, получаем

$$\frac{1}{P_{\alpha_k(i)}} = 1,0 + k_i \left( 1,5 - \frac{k_i}{2n_i} \right) - \frac{(1,0 + k_i)^2}{2,0 + n_i}. \quad (8)$$

Если ряд прокладывается между двумя сторонами с твердыми азимутами (дирекционными углами), то

$$\frac{1}{P_{\alpha_b(k)}} = 1,5 k \left( 1,0 - \frac{k}{n} \right). \quad (9)$$

Для свободного ряда, не учитывая ошибки в азимуте (дирекционном угле) исходной стороны, выражение будет иметь вид

$$\frac{1}{P_{\alpha(n)}} = n. \quad (10)$$

Формулы (7) — (10) можно применять при любом продвиге ряда.

Для определения величины, обратной весу вычисленной связующей стороны ряда, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\lg b_{k(i)}}} &= \omega_{b_i} + 0,5 \delta_1^2 k_i \left( 3,0 - \frac{k_i}{n_i} \right) - \frac{\omega_{b_i}^2}{\omega_{b_{i-1}} + \omega_{b_i} + 1,5 \delta_1^2 n_{i-1}} - \\ &- \frac{(\omega_{b_i} - \delta_1^2 k_i)^2}{\omega_{b_i} + \omega_{b_{i+1}} + \delta_1^2 n_i}. \end{aligned} \quad (11)$$

При равенстве средних квадратических ошибок измерения выходных и дополнительно измеряемых связующих сторон ряда, пренебрегая третьим членом формулы (11), как оказывающим малое влияние на конечный результат вычисления по ней, формула будет иметь вид

$$\frac{1}{P_{\lg b_k(l)}} = \omega_b + 0,5 \delta_1^2 k_l \left( 3,0 - \frac{k_l}{n_l} \right) - \frac{(\omega_b + \delta_1^2 k_l)^2}{2\omega_b + \delta_1^2 n_l}. \quad (12)$$

Для ряда из квадратов формула (12) записывается

$$\frac{1}{P_{\lg b_k(l)}} = 4,4 + 2,2 k_l \left( 3,0 - \frac{k_l}{n_l} \right) - \frac{4,4 (1 + k_l)^2}{2,0 + n_l}. \quad (13)$$

Для ряда с любым продвижением, проложенным между двумя твердыми сторонами и твердыми азимутами этих сторон, получаем

$$\frac{1}{P_{\lg b_k}} = 1,5 \delta_1^2 k \left( 1,0 - \frac{k}{n} \right), \quad (14)$$

а для ряда из квадратов

$$\frac{1}{P_{\lg b_k}} = 6,6 k \left( 1,0 - \frac{k}{n} \right). \quad (15)$$

Наконец, для свободного ряда, состоящего также из квадратов,

$$\frac{1}{P_{\lg b_n}} = 4,4 n. \quad (16)$$

Формулы (8), (9), (12)–(15) применим к ряду из 12 фигур в различных вариантах его структуры. При условии сохранения равенства (1)  $\omega_{\alpha_2}=1,0$  и  $\omega_b=4,4$ . Заметим, что при этом условии величина  $\omega_b=-\Delta_b q_b$  остается постоянной, не зависимой от длины связующей стороны прямоугольника. Результаты вычисления  $1:P_{\alpha}$  и  $1:P_{\lg b}$  приведены в табл. 1, причем как в этой таблице, так и в табл. 3 в графе Структура

Таблица 1

Величины  $\frac{1}{P_{\alpha}}$  и  $\frac{1}{P_{\lg b}}$

Структура ряда	При любом $q$			$q=1,0$			$q=1,5$			$q=2,0$		
	$\frac{1}{P_{\alpha_2}}$	$\frac{1}{P_{\alpha_n}}$	$\frac{1}{P_{\alpha_0}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_3}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_6}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_9}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_3}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_6}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_9}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_3}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_6}}$	$\frac{1}{P_{\lg b_9}}$
A	3,4	4,5	3,4	15,0	19,8	15,0	33,8	45,2	33,8	59,4	79,2	59,4
B	4,0	5,0	4,0	17,5	22,1	17,5	36,4	47,2	36,4	67,8	81,4	67,8
C	2,6	—	2,6	12,1	—	12,1	24,7	—	24,7	41,8	—	41,8
D	1,6	1,8	1,6	7,5	8,8	7,5	14,0	17,2	14,0	19,1	26,1	19,1

ряда под A необходимо понимать ряд, проложенный между твердыми сторонами с твердыми их азимутами; под B — ряд, проложенный между измеренными выходными сторонами и определенными азимутами этих сторон; под C — ряд с одной дополнительно измеренной стороной и определенным ее азимутом и, наконец, под D — ряд с двумя дополнительно измеренными сторонами и определенными их азимутами.

Весовые функции координат последней  $(2n+1)$ -й вершины ряда записываем в таком общем виде:

$$\begin{aligned} f_{y(2n+1)} = & 2,3 \cdot 10^{-6} [(y_{2n} - y_0) \Delta_0(b_0) + 2,1(x_{2n} - x_0)(\alpha_0) - n \delta_1 s(2) + \\ & + (n+1) \delta_1 s(6) + 2,1 b(7) - (n-1) \delta_1 s(10) + (n-2) \delta_1 s(14) + \\ & + 2,1 b(15) - \dots - \delta_1 s(8n-6) + 2,1 b(8n-1) + \\ & + (y_{2n+1} - y_{2n}) \Delta_n(b_n) + 2,1(x_{2n+1} - x_{2n})(\alpha_n)]; \end{aligned} \quad (17)$$

Таблица 2

Формулы для вычисления величин $\frac{1}{P_y(t)} \text{ и } \frac{1}{P_x(u)}$	
Продвиг (q)	$1:P_y(2n+1) = 1:P_{t(2n+1)}$
$q=1,0$	$\sum_{i=1}^{i=\lambda} \left\{ [1,65n_i^3 + (\omega_b + 2,2)n_i^2 - 1,1n_i + 8,8\omega_\alpha + 2,2] - \right.$ $\left. - \frac{[2,2n_i^2 + (\omega_b + 1,1)n_i]^2}{2\omega_b + 4,4n_i} - \frac{(0,6n_i + 4,2\omega_\alpha)^2}{2\omega_\alpha + n_i} \right\} \quad (19)$
$q=1,5$	$\sum_{i=1}^{i=\lambda} \left\{ [8,45n_i^3 + (2,25\omega_b + 5,0)n_i^2 - 1,2n_i + 8,8\omega_\alpha + 5,0] - \right.$ $\left. - \frac{[7,45n_i^2 + (0,9\omega_b + 1,0)1,7n_i]^2}{2\omega_b + 10,0n_i} - \frac{(0,6n_i + 4,2\omega_\alpha)^2}{2\omega_\alpha + n_i} \right\} \quad (21)$
$q=2,0$	$\sum_{i=1}^{i=\lambda} \left\{ [26,4n_i^3 + (4\omega_b + 8,8)n_i^2 - 2,7n_i + 8,8\omega_\alpha + 8,9] - \right.$ $\left. - \frac{[17,6n_i^2 + (\omega_b + 2,2)n_i]^2}{2\omega_b + 17,6n_i} - \frac{(0,6n_i + 4,2\omega_\alpha)^2}{2\omega_\alpha + n_i} \right\} \quad (23)$
(20)	
(22)	
(24)	

$$\begin{aligned}
 f_{x(2n+1)} = & [2,3 \cdot 10^{-6} [(x_{2n} - x_0) \Delta_0 (b_0) + 2,1 (y_{2n} - y_0) (\alpha_0) - \delta_1 b(2) + \\
 & + 2,1 (n-1) s(3) - 2,1 n s(7) - \delta_1 b(10) + 2,1 (n-2) s(11) - \\
 & - 2,1 (n-1) s(15) - \dots - \delta_1 b(8n-6) - 2,1 s(8n-1) + \\
 & + (x_{2n+1} - x_{2n}) \Delta_n (b_n) + 2,1 (y_{2n+1} - y_{2n}) (\alpha_n)]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Таблица 3

Величины  $1:P_{t(2n+1)}$  и  $1:P_{u(2n+1)}$ 

Структура ряда	$n=16$		$n=12$		$n=8$	
	$m_{t(m)}$	$m_{u(m)}$	$m_{t(m)}$	$m_{u(m)}$	$m_{t(m)}$	$m_{u(m)}$
A	$\pm 0,48$	$\pm 0,45$	$\pm 0,30$	$\pm 0,28$	$\pm 0,17$	$\pm 0,15$
B	0,51	0,49	0,36	0,33	0,20	0,18
C	0,29	0,26	0,20	0,18	0,11	0,09
D	0,20	0,18	0,15	0,13	0,09	0,07

Необходимо учитывать, что при составлении выражений (17) и (18) для данного ряда начало каждой измеренной связующей стороны служит конечной вершиной предыдущей части ходовой линии и началом следующей ее части. При этом углы, передающие сторону  $s'_{k(l)}$  каждой части ряда на очередную измеренную связующую сторону, не будут принимать участия в образовании весовых функций координат его конечной вершины, а углы, передающие азимут стороны ходовой линии  $s_{k(l)}$ , также не будут учитываться при их составлении.

Совместное решение уравнений второй группы и весовой функции координат по той или иной оси при условии, что средние квадратические ошибки угловых и линейных измерений и азимутальных определений постоянны, приведет нас к формулам для вычисления величин, обратных весам координат конечной вершины ряда (продольного и попечерного его сдвигов), приведенным в табл. 2.

Наличие большого количества геометрических связей в построениях из геодезических четырехугольников и тем более учет ошибок всех измерений привели к довольно сложным по своему виду и составу расчетным формулам, однако необходимо отметить, что практическое их применение сводится к элементарным арифметическим операциям.

Приведенные в табл. 2 формулы можно значительно упростить в результате чисто алгебраических преобразований. Так, например, применительно к ряду из квадратов при соблюдении условия (1) формулы (19) и (20) принимают такой вид:

$$\frac{1}{P_{y(2n+1)}} = \sum_{i=1}^{t-\lambda} 0,55 n_i (n_i^3 + 8,0 n_i^2 + 9,3 n_i + 8,4) (n_i + 2)^{-1}; \quad (19)$$

$$\frac{1}{P_{x(2n+1)}} = \sum_{i=1}^{t-\lambda} 0,65 n_i (n_i^3 + 3,7 n_i^2 + 2,5 n_i + 1,5) (n_i + 2)^{-1}, \quad (20)$$

а для ряда из квадратов, но проложенном между двумя твердыми сторонами с твердыми азимутами (дирекционными углами) этих сторон, получаем

$$\frac{1}{P_{y(2n+1)}} [2,4 n (n^3 + 2n^2 - 3n) + 9,7] (4,4 n)^{-1}; \quad (21)$$

$$\frac{1}{P_{x(2n+1)}} = 2,9 n (n^3 - 1,7 n^2 - 0,9 n) (4,4 n)^{-1}. \quad (22)$$

Учитывая, однако, что при проектировании конкретного ряда могут возникнуть разные комбинации количества и мест расположения дополнительных линейных измерений и азимутальных определений, то есть чтобы придать формулам, приведенным в табл. 2, универсальность при их практическом применении, они не подвергнуты каким-либо преобразованиям.

Переход от величин  $1 : P_{y(t)}$  и  $1 : P_{x(u)}$  к средним квадратическим ошибкам ( $m_{y(t)}$  и  $m_{x(u)}$ ) следует производить по формулам:

$$m_{y(2n+1)} = m_{t(2n+1)} = \pm 2,3 \cdot b^{(m)} \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y(t)}} \cdot 10^{-6}}, \quad (23)$$

$$m_{x(2n+1)} = m_{t(2n+1)} = \pm 2,3 \cdot b^{(m)} \mu \sqrt{\frac{1}{P_{x(u)}} \cdot 10^{-6}}, \quad (24)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Все предлагаемые расчетные формулы являются строгими. Однако округление величины  $\phi$  и некоторых цифровых коэффициентов (до единицы после запятой) предопределило некоторую потерю точности вычислений при их практическом применении (до 4—5%).

Формулы для вычисления  $1 : P_{y(t)}$  и  $1 : P_{x(u)}$  ( $m_{y(t)}$  и  $m_{x(u)}$ ) конечной вершины ряда применяем к рядам, состоящим из 16, 12 и 8 фигур в разных их структурах. Принимаем, что  $b=2,0$  км, а  $m_\beta=\pm 2'',0$ , сохраним условие (1). Результаты вычислений сводим в табл. 3.

Данные, приведенные в табл. 1, 3, убедительно показывают положительное влияние дополнительных линейных измерений и азимутальных определений связующих сторон фигур, составляющих ряд, на точность его элементов. Кроме того, можно сделать вывод, что даже при значительном числе фигур в ряду пренебрегать ошибками измерения выходных сторон их азимутов (дирекционных углов) не следует. Это замечание относится не только к расчетам точности элементов ряда при его проектировании, но и должно учитываться при последующих уравнительных вычислениях, которые надо производить под условием минимума суммы квадратов поправок во все измеренные элементы ряда.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Закатов П. С. О точности построения рядов триангуляции 1-го класса из геодезических четырехугольников. — «Тр. ЦНИИГАиК», 1937, вып. 15.

Работа поступила в редколлегию 29 апреля 1973 года. Рекомендована кафедрой геодезии и маркшейдерского дела Криворожского горнорудного института.