

Я. М. КОСТЕЦКАЯ

## О ВЛИЯНИИ ТВЕРДЫХ ДИРЕКЦИОННЫХ УГЛОВ СТОРОН РЯДА ТРИЛАТЕРАЦИИ НА ТОЧНОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ ПУНКТОВ

Для выяснения влияния твердых дирекционных углов связующих и промежуточных сторон при разной их густоте на точность положения пунктов в рядах трилатерации были проведе-

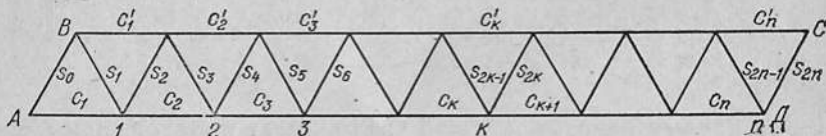


Схема ряда трилатерации.

ны исследования на модели ряда трилатерации, построенного из равносторонних треугольников. Точность положения пунктов характеризовалась продольным и поперечными сдвигами. Величину сдвигов определяли по обратным весам, полученным из уравнивания сети по методу условий (рисунок). Связующие стороны обозначены буквой  $s$ , промежуточные —  $c$ , а диагональ  $AD$  состоит из  $n$  промежуточных сторон  $c$ .

Для получения обратных весов составляли весовые функции продольного и поперечного сдвигов для  $k$ -й точки диагонали  $AD$ . Весовую функцию продольного сдвига записывают:

$$F_u = (c_1) + (c_2) + (c_3) + \dots + (c_k). \quad (1)$$

Весовая функция поперечного сдвига  $k$ -й точки ряда после перехода от поправок в углы к поправкам в стороны имеет вид [1]:

$$F_t = \frac{1}{3} [(k-2)(s_0) + 2(s_1) - 2(s_2) + 2(s_3) - \dots + 2(s_{2k-3}) - \\ - 2(s_{2k-2}) + 2(s_{2k-1}) - (2k-1)(c_1) - (2k-3)(c_2) - \\ - (2k-5)(c_3) - \dots - 3(c_{k-1}) - (c_k) + 2(k-1)(c'_1) + \\ + 2(k-2)(c'_2) + 2(k-3)(c'_3) + \dots + 4(c'_{k-2}) + 2(c'_{k-1})], \quad (2)$$

где  $(s_j)$ ,  $(c_j)$ ,  $(c'_j)$  — поправки в стороны  $s_j$ ,  $c_j$ ,  $c'_j$  (рисунок).

Если ряд свободен, то обратные веса продольного и поперечного сдвигов соответственно составляют

$$\frac{1}{P_u} = [f_u f_u] = k; \quad \frac{1}{P_t} = [f_t f_t] = \frac{k}{9} (8k^2 - 3k + 13). \quad (3)$$

Исследуем вначале влияние дирекционных углов связующих сторон на величины продольных и поперечных сдвигов. Если ряд трилатерации построен между сторонами  $s_0$  и  $s_{2n}$  с твердыми дирекционными углами, то возникает одно условное уравнение, которое после выражения поправок в углы через поправки в стороны примет вид [2]:

$$\frac{\rho}{\sqrt{3}a} [(s_0) - (s_{2n}) - 2(c_1) - 2(c_2) - \dots - 2(c_n) + 2(c'_1) + \\ + 2(c'_2) + \dots + 2(c'_n) + w] = 0. \quad (4)$$

Для этого случая легко получить обратные веса продольного и поперечного сдвигов:

$$\frac{1}{P_u} = k - \frac{4k^2}{2(4n+1)}; \\ \frac{1}{P_t} = \frac{k}{9} (8k^2 - 3k + 13) - \frac{(4k^2 - k + 2)^2}{6(4n+1)}. \quad (5)$$

Продольные и поперечные сдвиги точек ряда  
с твердыми дирекционными углами связующих сторон (см)  
 $\mu = \pm 2$  см,  $n = 12$

$k$	Свободный ряд	$r=12$	$r=6$	$r=3$	$r=2$	$r=1$
1	2,00	1,96	1,92	1,84	1,77	1,44
	2,82	2,83	2,82	2,81	2,81	2,80
2	2,82	2,71	2,59	2,35	2,11	2,10
	4,89	5,72	5,55	5,22	4,90	3,91
3	3,46	3,25	3,02	2,54	2,71	2,54
	10,07	9,39	8,70	7,21	5,47	4,75
4	4,00	3,66	3,30	3,11	2,91	2,90
	15,14	13,55	11,81	7,52	6,83	5,47
5	4,47	3,99	3,46	3,44	3,37	3,23
	20,98	17,96	14,60	8,82	7,25	6,11
6	4,90	4,26	3,53	3,53	3,53	3,53
	27,47	22,43	16,16	10,17	8,32	6,68
7	5,29	4,47	4,02	3,96	3,92	3,80
	34,56	26,74	16,18	10,38	8,67	7,21
8	5,70	4,64	4,39	4,21	4,06	4,05
	42,21	30,95	17,06	11,36	9,60	7,70
9	6,00	4,77	4,67	4,30	4,40	4,29
	50,36	34,69	18,54	12,43	9,89	8,16
10	6,32	4,86	4,88	4,66	4,52	4,52
	59,00	37,84	20,50	12,56	10,71	8,60
11	6,63	4,92	5,02	4,87	4,83	4,74
	68,08	40,21	22,62	13,43	10,97	9,01
12	6,92	4,95	5,13	4,95	4,95	4,94
	77,60	41,52	24,55	14,35	13,72	9,41

Примечание: В числителе даны значения продольных, а в знаменателе — поперечных сдвигов.

Теперь предположим, что в ряде трилатерации имеются твердые дирекционные углы связующих сторон через  $2r$  треугольников. В этом случае число возникающих условных уравнений равно числу твердых дирекционных углов без одного. Условные уравнения имеют такой же вид, как (4), только в них будут поправки в те связующие стороны, для которых имеются жесткие дирекционные углы (например,  $s_0$  и  $s_{2r}$  в первом уравнении,  $s_{2r}$  и  $s_{4r}$  во втором и т. д.). Поправок в стороны  $s$  и  $s'$  будет  $r$ . В первом уравнении будут поправки в стороны от  $s_1$  до  $s_r$ , во втором — от  $s_{r+1}$  до  $s_{2r}$  и т. д. Величины обратных весов определяли для случаев, когда в ряде имеются твердые

дирекционные углы через 12 треугольников, через 6 треугольников, через 4 и 2 треугольника, то есть для четырех случаев при  $r=6, 3, 2, 1$ . Такие вычисления велись для рядов с разным числом треугольников  $2r$ , но всегда  $n$  было в целое число раз больше  $r$ . Эти вычисления показали, что в каждом случае величины сдвигов не зависят от длины ряда, а только от удаления точки от края ряда, то есть от ее номера  $k$ . Только для последних точек ряда с номерами  $k=n-1, k=n$  имеются незначительные различия в рядах разной длины, то есть точки на краю ряда имеют несколько отличающиеся веса сдвигов точек с теми же номерами, но расположенными в середине ряда. Это объясняется тем, что на положение этих двух точек оказывает влияние уравнение, которое в более коротком ряде не возникает. Но эти отличия в весах не превышают 10%, поэтому в табл. 1 приведены значения средних квадратических сдвигов для ряда, состоящего из 24 треугольников ( $n=12$ ), которые получены по вычисленным обратным весам. Как видим из этой таблицы, на точность положения пунктов существенное влияние оказывают твердые дирекционные углы связующих сторон. При этом продольные сдвиги точек уменьшаются незначительно, а поперечные — существенно, что приводит к частичному выравниванию сдвигов. Так, в ряде с жесткими дирекционными углами сторон  $s_0, s_2, s_4, s_6 \dots$  поперечный сдвиг для любой точки ряда только в два раза больше продольного. Для точки с номером  $k=10$  продольный сдвиг равен 4,5 см, а поперечный 8,6 см. Для этого случая веса продольного и поперечного сдвигов изменяются строго по линейным законам в зависимости от номера точки  $k$ :

$$\frac{1}{P_u} = 0,50k + 0,11; \quad \frac{1}{P_t} = 1,83k + 0,15. \quad (6)$$

Теперь предположим, что в ряде трилатерации имеют твердые дирекционные углы первая и последняя промежуточные стороны диагонали  $AD$ , то есть стороны  $c_1$  и  $c_n$ . В этом случае возникает одно условное уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\sqrt{3} a} [2(s_0) - 2(s_1) - 2(s_{2n-2}) + 2(s_{2n-1}) - (c'_1) - 2(c'_2) - \\ - 2(c_3) - \dots - 2(c_{n-1}) - (c_n) + 2(c'_1) + 2(c'_2) + \\ + 2(c'_3) + \dots + 2(c'_{n-1}) + w] = 0. \end{aligned}$$

При этом обратные веса продольного и поперечного сдвигов соответственно составят

$$\frac{1}{P_u} = k - \frac{(2k-1)^2}{2(4n+3)};$$

$$\frac{1}{P_t} = \frac{k}{9} (8k^2 - 3k + 13) - \frac{(4k^2 - 2k - 7)^2}{3(8n+6)}. \quad (7)$$

Таблица 2

Продольные и поперечные сдвиги точек ряда  
с твердыми дирекционными углами промежуточных сторон

$\mu = \pm 2$  см,  $n = 13$

$k$	Свободный ряд	$r=12$	$r=6$	$r=3$	$r=2$	$r=1$
1	2,000	1,99	1,98	1,97	1,96	1,95
	2,82	3,77	2,73	2,66	2,61	2,51
2	2,82	2,77	2,72	2,65	2,60	2,58
	4,89	5,86	5,84	5,81	5,79	5,02
3	3,46	3,33	3,22	3,04	3,08	3,00
	10,07	9,74	9,48	9,06	7,83	7,42
4	4,00	3,77	3,58	3,42	3,42	3,33
	15,14	14,15	13,31	10,91	10,93	10,03
5	4,47	4,13	3,83	3,78	3,72	3,63
	20,98	18,88	17,03	13,94	13,16	10,83
6	4,90	4,43	4,01	4,00	3,99	3,90
	27,47	23,77	20,35	17,15	16,18	15,05
7	5,29	4,64	4,28	4,25	4,24	4,15
	34,56	28,70	21,87	19,26	18,50	17,56
8	5,70	4,88	4,63	4,54	4,47	4,38
	42,21	33,52	24,65	22,21	21,44	18,68
9	6,00	5,05	4,91	4,51	4,70	4,60
	50,36	38,11	27,88	25,30	23,82	22,59
10	6,32	5,18	5,11	4,92	4,89	4,81
	59,00	42,35	31,33	27,55	26,70	25,08
11	6,63	5,29	5,26	5,17	5,10	5,02
	68,08	46,09	34,68	30,45	28,97	27,58
12	6,92	5,36	5,36	4,93	5,31	5,23
	77,60	49,20	37,92	33,43	31,93	30,09
13	7,21	5,41	5,57	5,55	5,55	5,50
	107,99	81,55	39,84	35,78	33,21	32,60

Примечание: В числителе даны значения продольных, а в знаменателе — поперечных сдвигов.

Затем предполагалось, что в ряде твердые дирекционные углы имеют связующие стороны через  $2r+1$  треугольник. При этом рассматривались четыре случая:  $r=6$  (то есть твердые дирекционные углы имеют стороны  $c_1, c_r, c_{13} \dots$ ),  $r=3$  (то же

для сторон  $c_1, c_2, c_r \dots$ ),  $r=2$  и  $r=1$ . Длины рядов подбирали всегда так, чтобы последняя промежуточная сторона имела твердый дирекционный угол. Попутно с уравниванием ряда определяли обратные веса сдвигов всех точек диагонали  $AD$ . Эти вычисления показали, что на величины обратных весов также влияет только удаление точки от края сети, то есть они являются функциями номера  $k$ . Длина ряда практически не влияет на точность положения пунктов. В табл. 2 приведены значения продольных и поперечных сдвигов всех точек ряда, состоящего из 26 треугольников. Как показывают эти данные, дирекционные углы промежуточных сторон тоже уменьшают величину поперечного сдвига, но меньше, чем дирекционные углы связующих сторон. При этом увеличение густоты промежуточных сторон с жесткими дирекционными углами больше  $r=6$  практически не повышает точность положения пунктов. А если каждая шестая промежуточная сторона имеет жесткий дирекционный угол, то поперечный сдвиг точек в среднем в 4 раза больше продольного, и уменьшается по сравнению со свободным рядом [1].

Из сравнения данных табл. 1 и 2 видно, что в рядах трилатерации, в которых нет твердых пунктов, выгоднее иметь твердые дирекционные углы связующих сторон, чем промежуточных. При этом твердые дирекционные углы связующих сторон почти выравнивают величины продольных и поперечных сдвигов: даже в ряде из 26 треугольников поперечный сдвиг только в два раза больше продольного.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Костецкая Я. М. Про розподіл помилок положення пунктів у рядах трилатерації. — ДАН УССР, 1972, вып. 2.
2. Костецкая Я. М. О точности определения дирекционных углов в сплошных сетях трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 20.

Работа поступила 12 января 1976 года.  
Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского ордена Ленина политехнического института.