УДК 528.23

В. П. ПОДШИВАЛОВ, канд. техн. наук
Новополоцкий политехнический институт

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ЛЮБЫЕ РАССТОЯНИЯ

Решение прямой геодезической задачи исследовано многосторонне и весьма обстоятельно в работах Ф. В. Бесселя, К. Ф. Гаусса, Г. В. Багратуни, А. В. Буткевича, В. Н. Ганьшина, В. П. Морозова и др. [1, 2, 4]. При этом установлено, что для решения задачи на любые расстояния наилучшим является способ Бесселя, в основу которого положено основное свойство геодезических линий на поверхностях вращения, выражаемое уравнением Клеро.

На наш взгляд, на поверхности эллипсоида возможно интегрирование вдоль геодезической линии произвольной длины с точностью, достаточной для решения научных и практических задач геодезии, и не возникает необходимости ставить в соответствие полярному сфероидическому треугольнику полярный сферический треугольник, как это производится по способу Бесселя.

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dS}=\frac{V\cos A}{a}\,;\quad \frac{dL}{dS}=\frac{\sin A}{a\cos u}\,;\quad \frac{dA}{dS}=\frac{V\operatorname{tg}u}{a}\sin A \qquad (1)$$

определяет геодезическую линию на поверхности эллипсоида вращения, где u — приведенная широта; A — азимут; L — долгота; S — длина геодезической линии.

Первый интеграл системы (1) определяет основное свойство геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения и выражается уравнением Клеро

$$\sin A\ \cos u=c. \qquad (2)$$

Кроме того, из системы уравнений (1) с учетом уравнения (2) получаем следующие интегральные уравнения:

$$S_{12}=a\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u-c^2}}\cos u\,du; \qquad (3)$$

$$l=L_2-L_1=c\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u-c^2}}\,du. \qquad (4)$$

Как отмечено в работе [2], уравнения (3) и (4) приводят к решениям, «сходным» со способом Бесселя.

Интегралы, стоящие в правых частях уравнений (3) и (4), эллиптические и, следовательно, могут быть вычислены лишь приближенно. Отметим, что и приближенное интегрирование здесь затруднительно и не приводит к результату, удобному для практических вычислений. По мнению профессора Г. А. Мещерякова, такие интегралы целесообразно вычислять, сводя их к стандартным эллиптическим интегралам, для которых следует выбирать оптимальный алгоритм вычислений.

Заменим переменную под знаками интегралов (3) и (4) по формуле

$$\sin u = \sqrt{1-c^2}\cos x. \tag{5}$$

В функции новой переменной интегралы (3), (4) примут вид:

$$S_{12} = a_1 \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\, dx; \tag{6}$$

$$l = c \int_{x_2}^{x_1} \frac{\sqrt{1-e^2[1-(1-c^2)\cos^2 x]}}{1-(1-c^2)\cos^2 x}\, dx. \tag{7}$$

Длина дуги геодезической линии S_{12} выражена эллиптическим интегралом второго рода в форме Лежандра, где x и $k^2 = \dfrac{e^2(1-c^2)}{1-e^2c^2}$ — его амплитуда и модуль; $a_1 = a\sqrt{1-e^2c^2}$.

Вычисление полученных интегралов произведем путем разложения подынтегральных выражений в ряд по формуле бинома Ньютона, ограничиваясь третьими членами разложений:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2 x} = 1 - \frac{k^2}{2}\sin^2 x - \frac{k^4}{8}\sin^4 x - \frac{k^6}{16}\sin^6 x - \cdots; \tag{8}$$

$$\sqrt{1-e^2[1-(1-c^2)\cos^2 x]} = 1 - \frac{e^2}{2}[1-(1-c^2)\cos^2 x] -$$
$$- \frac{e^4}{8}[1-(1-c^2)\cos^2 x]^2 - \frac{e^6}{16}[1-(1-c^2)\cos^2 x]^3 - \cdots. \tag{9}$$

Погрешность полученных разложений оценим с помощью остаточного члена в форме Лагранжа [3]. Эта погрешность в относительной мере для обоих разложений не превысит величины $1\cdot 10^{-10}$.

С учетом полученных разложений интегралы (6) и (7) примут вид:

$$S_{12} = a_1 \int_{x_2}^{x_1} \left(1 - \frac{k^2}{2}\sin^2 x - \frac{k^4}{8}\sin^4 x - \frac{k^6}{16}\sin^6 x\right) dx;$$

$$l = c\int\limits_{x_2}^{x_1}\left\{\frac{1}{1-(1-c^2)\cos^2 x} - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\left[1-(1-c^2)\cos^2 x\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{e^6}{16}\left[1-(1-c^2)\cos^2 x\right]^2\right\} dx.$$

Произведя почленное интегрирование, получим после несложных преобразований следующие выражения:

$$S_{12} = \alpha(x_1 - x_2) + \beta\sin(x_2 - x_1)\cos(x_1 + x_1) -$$
$$- \gamma\sin 2(x_1 - x_2)\cos 2(x_1 + x_1); \quad (10)$$

$$l = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x_1}{c}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x_2}{c}\right) - \alpha'(x_1 - x_2) +$$
$$+ \beta'\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 + x_2), \quad (11)$$

где для краткости приняты обозначения:

$$\alpha = a_1\left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} - \frac{5k^6}{256}\right); \ \beta = a_1\frac{k^2}{4}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{15k^4}{128}\right);$$
$$\gamma = a_1\frac{k^4}{128}\left(1 + \frac{3k^2}{4}\right); \quad (12)$$

$$\alpha' = \frac{e^2c}{2}\left(1 + \frac{e^2}{8} + \frac{e^2c^2}{8} + \frac{3e^4}{64} + \frac{e^4c^2}{32} + \frac{e^4c^4}{64}\right);$$
$$\beta' = \frac{e^4c}{16}(1 - c^2)\left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2c^2}{2}\right). \quad (13)$$

В абсолютной мере погрешность вычисления длины геодезической линии по формуле (10) для расстояний порядка 20 тыс. км не превзойдет 2 мм, а для долготы — 0″,0001.

Для практической реализации полученных формул полезно раскрыть геометрический смысл новой переменной x. Это ни что иное, как дуга большого круга сферы единичного радиуса, отсчитываемая от вертекса ее до одной из фиксированных точек p_1, p_2. При этом за положительное направление принимаем отсчитанное по часовой стрелке, если смотреть со стороны Северного полюса. При решении прямой геодезической задачи этого вполне достаточно для определения квадранта угла x.

Алгоритм решения прямой геодезической задачи, в основу которого положены предлагаемые формулы, содержит следующие операции:

1. Подготовительные вычисления по формулам:

а) $\operatorname{tg} u_1 = \sqrt{1 - e^2}\operatorname{tg} B_2$; б) $c = \sin A_{12}\cos u_1$; в) $a_1 = a\sqrt{1 - e^2c^2}$;

$$\text{г) } k^2 = \frac{e^2(1 - c^2)}{1 - e^2c^2};$$

д) $\alpha = a_1\left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64}\frac{5k^6}{256}\right)$; е) $\beta = a_1\frac{k^2}{4}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{15k^4}{128}\right)$;

$$\text{ж)}\ \gamma = a_1\frac{k^4}{128}\left(1 + \frac{3k^2}{4}\right);$$

$$\text{з)}\ \alpha' = \frac{e^2c}{2}\left(1 + \frac{e^2}{8} + \frac{e^2c^2}{8} + \frac{3e^4}{64} + \frac{e^4c^2}{32} + \frac{e^4c^4}{64}\right);$$

и) $\beta' = \frac{e^2c}{16}(1 - c^2)\left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2c^2}{2}\right)$; к) $\cos x_1 = \frac{\sin u_1}{\sqrt{1 - c^2}}$.

2. Вычисление амплитуды эллиптического интеграла x_2 последовательными приближениями (практически не более трех) из уравнения

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{\alpha}[S_{12} - \beta\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 + x_2) + \\ + \gamma\sin 2(x_1 - x_2)\cos 2(x_1 + x_2)].$$

3. Вычисление долготы L_2 по формуле

$$L_2 = L_1 + \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x_1}{c}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x_2}{c}\right) - \alpha'(x_1 + x_2) + \\ + \beta'\sin(x_2 - x_2)\cos(x_1 + x_2).$$

4. Вычисление геодезической широты B_2 и обратного азимута A_{21} по формулам:

$$B_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - c^2}\cos x^2}{\sqrt{1 - e^2}\sqrt{1 - (1 - c^2)\cos^2 x^2)}}\right);$$

$$A_{21} = \operatorname{arctg}\sin\left(\frac{c}{\sqrt{1 - (1 - c^2)\cos^2 x_2}}\right) \pm \pi.$$

Приведенный алгоритм решения прямой геодезической задачи удобен для программирования на ЭВМ, поскольку предполагает минимум исходной информации и несложную промежуточную выдачу значений амплитуды x_2. Для ручного счета необходимы десятизначные таблицы тригонометрических функций. При этом можно применять метод дифференциальных поправок, смысл которого изложен в работе [2], вместо последовательных приближений в формуле (10). Отметим, что точность предлагаемых формул при необходимости может быть повышена с помощью удержания бо́льшего числа членов разложений (8) и (9).

Практические вычисления по предлагаемым формулам показывают, что задача решается без каких-либо ограничений в расстояниях на поверхности земного эллипсоида. Объем вычислений примерно такой же, как и в способе Бесселя.

Результаты вычислений по предлагаемым формулам приведены в таблице.

Примеры решения прямой геодезической задачи

Действие	Результаты вычислений	
	Пример I	Пример II
u_1	$+45^\circ 00' 00'',000$	$+60^\circ 02' 00'',538$
L_1	00 00 00,000	+72 00 00,000
A_{12}	+90 00 00,000	+116 00 00,000
S_{12}	19 987 000,00 м	14 700 000,00 м
c	0,707 106 7812	0,448 942 0736
a_1	6,367 562,984	6 373 941 255
k^2	0,003 357 9489	0,005 351 5888
α	6 362 214,1260	6 365 405,0007
β	5 349,4822	8 539,1159
γ	0,5623	1,4319
α'	0,002 369 4597	0,001 503 9934
β'	0,000 000 9950	0,000 001 0078
x_1	0,000 000 0000	−0,247 567 3205
$x_2^{(0)}$	−3,141 516 3973	−2,556 925 4836
$x_2^{(1)}$	−3,141 516 4614	−2,557 861 4265
$x_2^{(2)}$	−3,141 516 4614	−2,557 860 9345
$x_2^{(3)}$	−3,141 516 4614	−2,557 860 9348
u_2	$-44^\circ 59' 59'',9999$	$-48^\circ 12' 37'',6632$
L_2	+179 34 02,4005	+166 37 29,7265
A_{21}	+269 59 44,6202	+317 38 52,0235

Сравнивая предлагаемый алгоритм с алгоритмом Бесселя и учитывая, что он получен принципиально иным путем, чем способ Бесселя и его различные модификации, можно надеяться, что предлагаемый способ решения прямой геодезической задачи на любые расстояния найдет применение в практике. Предлагаемые формулы могут быть положены в основу изыскания нового способа решения обратной геодезической задачи на любые расстояния.

Список литературы: 1. *Багратуни Г. В.* Курс сфероидической геодезии. М., Геодезиздат, 1962. 2. *Буткевич А. В.* Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. М., Недра, 1964. 3. *Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии. М., Недра, 1969. 4. *Корн Г. Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., Наука, 1977.

Работа поступила 13 марта 1978 года. Рекомендована кафедрой геодезии Новополоцкого политехнического института.