

Ю. Н. КОРНИЦКИЙ

О ПРОДОЛЬНОМ И ПОПЕРЕЧНОМ СДВИГЕ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ, ПРОЛОЖЕННОГО МЕЖДУ ИСХОДНЫМИ ПУНКТАМИ

Наличие исходных пунктов значительно повышает точность как угловых, так и линейных элементов ряда.

Цель этой статьи — изучить распределение ошибок в несвободных рядах линейно-угловой триангуляции. В результате исследований определены формулы для подсчета обратных весов функций продольного и поперечного сдвига ряда, состоящего из геодезических квадратов и уравненного за условия фигуры, сторон, координат и дирекционных углов.

При уравнении подобного ряда по методу условных измерений (см. рисунок) возникает 3n условных уравнений фигур вида:

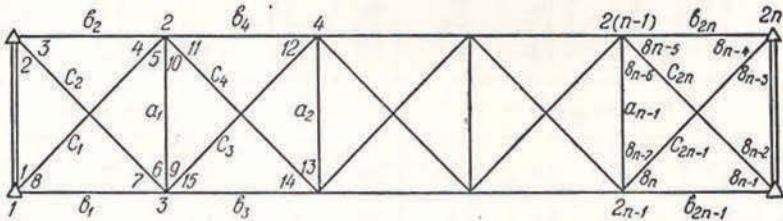


Схема линейно-углового ряда из геодезических квадратов, проложенного между исходными пунктами.

$$(8i-7) + (8i-6) + (8i-5) + (8i-4) + w_{i,1} = 0; \quad (1)$$

$$(8i-3) + (8i-2) + (8i-1) + (8i) + w_{i,2} = 0; \quad (2)$$

$$(8i-5) + (8i-2) + (8i-4) + (8i-3) + w_{i,3} = 0, \quad (3)$$

где i — порядковый номер квадрата; $(8i-7), (8i-6), \dots$ — вероятнейшие поправки к измеренным углам; b_l условных уравнений сторон вида:

$$(\lg a_{i-1}) - (\lg b_{2i-1}) + \delta_{8i-7}(8i-7) - \delta_{8i-4}(8i-4) + w_{i,4} = 0; \quad (4)$$

$$(\lg b_{2i-1}) - (\lg c_{2i-1}) - \delta_{8i-7}(8i-7) + w_{i,5} = 0; \quad (5)$$

$$(\lg a_i) - (\lg b_{2i}) + \delta_{8i-3}(8i-3) - \delta_{8i}(8i) + w_{i,6} = 0; \quad (6)$$

$$(\lg b_{2i}) - (\lg c_{2i-1}) - \delta_{8i-3}(8i-3) + w_{i,7} = 0; \quad (7)$$

$$(\lg b_{2i-1}) - (\lg c_{2i}) - \delta_{8i-2}(8i-2) + w_{i,8} = 0; \quad (8)$$

$$(\lg a_i) - (\lg c_{2i}) - \delta_{8i-5}(8i-5) + w_{i,9} = 0, \quad (9)$$

где $(\lg a_i)$, $(\lg c_{2i})$, $(\lg b_{2i})$ — вероятнейшие поправки к логарифмам длин сторон; δ_{8i} — изменение логарифма синуса при изменении угла на $1''$ (для рассматриваемого случая $\delta_{8i} = \delta_{8i-7} = \delta_{45^\circ} = 2,11$); условные уравнения дирекционных углов и координат вида:

$$\sum_{i=1}^n \{(8i-7) - (8i-3)\} + w_e = 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta x_{2i-1, 2i} (\lg c_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta X_{2i, 2i+1} (\lg a_i) - r \sum_{i=1}^n (Y_{2n} - Y_{2i-1})(8i-7) + \\ + r \sum_{i=1}^{n-1} (Y_{2n} - Y_{2i})(8i-3) + w_x = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta Y_{2i-1, 2i} (\lg c_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta Y_{2i, 2i+1} (\lg a_i) + \\ + r \sum_{i=1}^n (X_{2n} - X_{2i-1})(8i-7) - r \sum_{i=1}^{n-1} (X_{2n} - X_{2i})(8i-3) + w_y = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $r = 10^6 M \sin 1''$.

Весовые функции продольного и поперечного сдвига записываем в виде:

$$(k \cdot 10^6 \mu) \frac{dL}{L} = (\lg b_1) + (\lg b_3) + \dots + (\lg b_{2k-1});$$

$$kdT = \sum_{j=k}^{l-1} [j(8i-7) + (j-1)(8i-2) + (j-1)(8i-1) + j(8i)].$$

Уравнение выполнялось по методу двух групп. В первую группу были включены $2n$ условных уравнений фигур вида (1) и (2), во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вычисляли по формулам:

$$a_i = a'_i - \frac{[a'_i]}{4} \text{ (при поправках в углы);}$$

$$a_i = a'_i \sqrt{q} \text{ (при поправках в стороны),}$$

где, как показал К. Л. Проворов [1].

$$q = \frac{1}{P_{\lg s}} = \left(\frac{10^6 \mu m_s}{m_s s} \right)^2,$$

и обозначали по порядку, в котором приведены выше, через $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, g_i, h_i, j, l, m, f_L$ и f_T .

На основании таблицы преобразованных коэффициентов были вычислены соответствующие им коэффициенты нормальных уравнений, а из решения последних получали коэффициенты эквивалентной системы.

Условные уравнения фигур независимы, следовательно,

$$[a_i a_{i-1}] = +2,0.$$

Для квадратичных коэффициентов уравнений сторон получаем:

$$\begin{aligned} [b_1 b_{i-1} n] = 1,5 \delta^2 + q; [b_i b_{i-1} (n+i-1)]_{i=2}^n = 1,5 \delta^2 + 2q = \eta; \\ [c_1 c_{i-1} 2n] = \frac{(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}{1,5 \delta^2 + q}; \\ [c_i c_{i-1} (2n+i-1)]_{i=2}^n = 0,25 \delta^2 + 1,5 q = v. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения для последующих квадратичных коэффициентов уравнений сторон более сложные

$$[d_1 d_1 \cdot 3n] = -\frac{0,25 \delta^4}{1,5 \delta^2 + q} - \frac{q^2}{\eta} - \frac{0,25 q^2}{\nu} - \frac{0,0625 \delta^4 q^2}{(1,5 \delta^2 + q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}.$$

После ряда преобразований

$$[d_1 d_1 \cdot 3n] = \frac{Y}{\eta \nu}, \quad (14)$$

где

$$Y = 4q^3 + 9,375 \delta^2 q^2 + 4,5 \delta^4 q + 0,5 \delta^6.$$

Остальные квадратичные коэффициенты уравнений этого вида, кроме последнего, определяются из выражения

$$[d_i d_i \cdot (3n + i - 1)]_{i=2}^{n-1} = \frac{Y \beta_{i-1} - 0,25 \delta^4 q^2 \nu^2 \beta_{i-2}}{\eta \nu \beta_{i-1}}.$$

Однако с достаточной для практических целей точностью эти коэффициенты можно принять равными. При этом ошибки в величинах коэффициентов будут не более 1%.

Выражение для последнего квадратичного коэффициента не приводим, так как оно практически не влияет на величину обратного веса

$$[e_1 e_1 \cdot 4n] = 0,625 \delta^2 + 2q - \frac{0,0625 \delta^4}{1,5 \delta^2 + q} - \frac{(q^2 + q)^2 (q^2 + 2q)^2 \nu}{\eta Y} - \\ - \frac{q^2 (1,375 \delta^2 + q)^2}{(1,5 \delta^2 + q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}.$$

После ряда преобразований получаем

$$[e_1 e_1 \cdot 4n] = \frac{(0,528 \delta^2 + q)(6,08 \delta^2 + q)(0,125 \delta^2 + q)}{4(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}. \quad (15)$$

Для остальных коэффициентов этого вида имеем

$$[e_i e_i \cdot (4n + i - 1)]_{i=2}^{n-1} = \frac{(3,125 \delta^2 + q)(0,803 \delta^2 + q)(q - 0,045 \delta^2)}{\eta \nu}. \quad (16)$$

Коэффициенты эквивалентной системы, соответствующие двум последним видам уравнений сторон, не приведены, так как очень громоздки, а влияние этих уравнений на величины обратных весов незначительно.

Квадратичный коэффициент условного уравнения дирекционных углов можно получить из выражения

$$[jj.7n] = n \left\{ 1 - \frac{0,25 \delta^2}{\eta} - \frac{0,0625 \delta^4}{\nu} - \frac{4 \delta^2 \eta \nu}{9Y} - \right. \\ \left. - \frac{\delta^2 \nu (3,41 \delta^2 + q)}{18 (1,74 \delta^2 + q)(q - 0,043 \delta^2)} \right\} + \frac{0,25 \delta^2}{\eta} - \frac{0,25 \delta^2}{1,5 \delta^2 + q} + \\ + \frac{0,0625 \delta^2}{\nu} - \frac{0,140625 \delta^4}{(1,5 \delta^2 + q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)},$$

которое (с ошибкой не более 1%) приводится к виду

$$[jj.7n] = \frac{qn}{0,5 \delta^2 + q}. \quad (17)$$

Для координатных условных уравнений квадратичные коэффициенты эквивалентной системы очень громоздки, поэтому приводим их в окончательном виде

$$[\mathcal{U} \cdot (7n+1)] = \frac{0,5 \delta^2 (0,42 \delta^2 + q)(q - 0,12 \delta^2)}{q \eta} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \\ + \frac{\delta^2 (2,11 \delta^2 + q)(q - 0,07 \delta^2)}{5 \nu (1,5 \delta^2 + q)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{0,75 \delta^2 q (\delta^2 + q)}{\eta \nu} \cdot (2n-1); \quad (18)$$

$$[mm \cdot (7n+2)] = \frac{(0,3 \delta^2 + q)(0,05 \delta^2 + q)(2,25 \delta^2 + q)}{3 \eta (1,5 \delta^2 + q)} \cdot n + \\ + \frac{(q - 1,23 \delta^2)(q - 0,095 \delta^2)}{4(2\delta^2 + q)}. \quad (19)$$

Продольный сдвиг. Влияние уравнений вида A и B на величину обратного веса функции определяется выражением

$$\sum_{i=1}^n \frac{[b_i f_L \cdot (n+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (n+i-1)]} = \frac{q^2}{\eta} \cdot (k-1) = \frac{q^2}{1,5 \delta^2 + q}, \quad (20)$$

так как

$$[a_i f_L \cdot (i-1)] = 0; [b_i f_L \cdot (n+i-1)]_{i=1}^k = -q; [b_i f_L \cdot (n+i-1)]_{i=k+1}^n = 0.$$

Для следующих n коэффициентов эквивалентной системы получаем

$$[c_i f_L \cdot 2n] = \frac{0,75 \delta^2 q}{1,5 \delta^2 + q}; [c_i f_L \cdot (2n+i-1)]_{i=2}^k = 0,5 q; \\ [c_i f_L \cdot (2n+i-1)]_{i=k+1}^n = 0,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \frac{[c_i f_L \cdot (2n+i-1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2n+i-1)]} = \frac{0,25 q^2}{\eta} \cdot (k-1) + \\ + \frac{0,5625 \delta^4 q^2}{(1,5 \delta^2 + q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}. \quad (21)$$

Для уравнений D и весовой функции длины диагонали

$$[d_1 f_L \cdot 3n] = \frac{0,5 \delta^2 q}{1,5 \delta^2 + q} + \frac{q^2}{\eta} - \frac{0,1875 \delta^4 q^2}{(1,5 \delta^2 + q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)} - \\ - \frac{0,25 q^2}{\eta} = \frac{q(2,92 \delta^2 + q)(0,183 \delta^2 + q)(q^2 + 0,397 \delta^2 q + 0,093 \delta^4)}{\eta \nu (q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}; \quad (22)$$

$$[d_i f_L \cdot (3n+i-1)]_{i=2}^k = \frac{0,5 \delta^2 q}{\eta} + \frac{q^2}{\eta} + \frac{0,25 q^2}{\eta} + \frac{0,5 \delta^2 q \nu}{Y} \times \\ \times [d_{i-1} f_L \cdot (3n+1-2)] = \frac{q(q^2 + 0,625 \delta^2 q + 0,125 \delta^4)}{\eta \nu}. \quad (23)$$

При преобразовании формулы (23) последний член не учитывали, так как он составляет 1—2% от величины коэффициента.

Остальные коэффициенты этого вида близки к нулю и практически не влияют на величину обратного веса. Поэтому суммарное влияние этих уравнений можно записать так:

$$\sum_{i=1}^n \frac{[d_i f_L \cdot (3n+i-1)]^2}{[d_i d_i \cdot (3n+i-1)]} = \frac{q^2 (q^2 + 0,625 \delta^2 q + 0,125 \delta^4)^2}{\eta Y} \cdot (k-1) + \\ + \frac{q^2 (2,92 \delta^2 + q)^2 (0,183 \delta^2 + q)^2 (q^2 + 0,397 \delta^2 q + 0,093 \delta^4)^2}{\eta Y (q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}. \quad (24)$$

Выражение для уравнений вида E и весовой функции после ряда преобразований приводим к виду

$$\sum_{i=1}^n \frac{[e_i f_L \cdot (4n+i-1)]^2}{[e_i e_i \cdot (4n+i-1)]} = \frac{q^2 (\delta^2 + q)}{6\eta (1,74 \delta^2 + q)} (k-1) + 0,0208 q. \quad (25)$$

Суммарное влияние уравнений сторон последних двух видов будет

$$\sum_{i=1}^n \frac{[g_i f_L \cdot (5n+i-1)]^2}{[g_i g_i \cdot (5n+i-1)]} + \sum_{i=1}^n \frac{[h_i f_L \cdot (6n+i-1)]^2}{[h_i h_i \cdot (6n+i-1)]} = \frac{0,5 q (2\delta^2 + q)}{6\eta} k. \quad (26)$$

Для условного уравнения дирекционных углов и координатных условных уравнений соответственно получаем:

$$\frac{[jf_L \cdot 7n]^2}{[jj \cdot 7n]} = \frac{0,25 \delta^2 q}{0,5 \delta^2 + q} \cdot \frac{k^2}{n}; \quad (27)$$

$$\frac{[lf_L \cdot (7n+1)]^2}{[ll \cdot (7n+1)]} = \frac{q}{0,5 \delta^2 + q} \cdot \frac{3k^2 (n-k)^2}{n^2 (n+1)}; \quad (28)$$

$$\frac{[mf_L \cdot (7n+2)]^2}{[mm \cdot (7n+2)]} = \frac{q (q + 1,264 \delta^2)}{6 (q + 0,5 \delta^2)} \cdot \frac{k^2}{n}. \quad (29)$$

Зная величины (20), (21), (24)–(29), получаем приближенную формулу для подсчета обратного веса функции длины диагонали

$$\frac{1}{P'_L} = \frac{q (q + 12,305)}{6 (q + 2,226)} \cdot \frac{k (n-k)}{n} - \frac{q}{q + 2,226} \cdot \frac{3k^2 (n-k)^2}{n^2 (n+1)} - \\ - \frac{0,125 q^3}{(q + 3,339)(q + 6,678)}. \quad (30)$$

Значения весов, вычисленные по формуле (30) и полученные из решения систем нормальных уравнений по схеме Гаусса, приведены в таблице.

Поперечный сдвиг. Для уравнений вида A и весовой функции направления диагонали получаем:

$$[a_i f_T \cdot (i-1)]_{i=1}^k = -(k-i+1); [a_i f_T \cdot (i-1)]_{i=k+1}^n = 0,$$

следовательно, суммарное влияние этих уравнений будет

$$\sum_{i=1}^n \frac{[a_i f_T \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} = 0,5 \frac{k (2k+1)(k+1)}{6}. \quad (31)$$

Для уравнений вида B и весовой функции

$$[b_i f_T \cdot (n+i-1)]_{i=1}^k = 0,5 \delta (k-i+1); [b_i f_T \cdot (n+i-1)]_{i=k+1}^n = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{[b_i f_T \cdot (n+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (n+i-1)]} = \frac{0,25 \delta^2}{\eta} \cdot \frac{k (2k+1)(k+1)}{6} + \frac{0,25 \delta^2 q}{\eta (1,5 \delta^2 + q)} \cdot k^2. \quad (32)$$

Следующие n уравнений сторон вносят в обратный вес величину

$$\sum_{i=1}^n \frac{[c_i f_T \cdot (2n + i - 1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2n + i - 1)]} = \frac{0,0625 \delta^2}{\nu} \cdot \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} - \frac{0,0625 \delta^2 q (3,57 \delta^3 + q)(0,05 \delta^2 + q)}{\nu (1,5 \delta^2 + q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)} \cdot k^2. \quad (33)$$

Значения обратных весов $\frac{1}{P'_L}$ и $\frac{1}{P_T}$ при $m_\beta = 1''$

k	$\frac{m_s}{m_\beta S}$	$\frac{1}{P'_L}$			$\frac{1}{P_T}$		
		из схемы Гаусса	по формуле (30)	погрешность, %	из схемы Гаусса	по формуле (39)	погрешность, %
$n=3$							
1	1:100 000	1,630	1,321	19,0	0,439	0,418	4,8
1	1:300 000	0,633	0,590	6,8	0,286	0,290	1,4
1	1:500 000	0,300	0,282	6,0	0,171	0,179	4,7
$n=5$							
1	1:100 000	2,059	1,951	5,2	0,577	0,484	16,1
2	1:100 000	3,297	3,451	4,7	1,089	1,035	5,0
3	1:100 000	3,296	3,451	4,7	1,089	1,169	7,3
2	1:300 000	1,024	1,024	0	0,670	0,681	1,7
1	1:500 000	0,358	0,358	0	0,218	0,199	8,7
2	1:500 000	0,477	0,477	0	0,389	0,402	3,3
3	1:500 000	0,477	0,477	0	0,389	0,444	14,0
$n=8$							
4	1:100 000	6,418	6,489	1,1	3,282	3,294	0,4
4	1:300 000	1,589	1,586	0,2	1,911	1,965	2,8
4	1:500 000	0,724	0,726	0,3	1,062	1,052	0,9

Первый коэффициент элиминационной системы для уравнений вида и весовой функции можно определить из выражения

$$[d_1 f_T \cdot 3n] = k \left\{ -0,5 \delta - \frac{0,25 \delta^3}{1,5 \delta^2 + q} - \frac{0,5 \delta q}{\eta} + \frac{0,125 \delta q}{\eta} + \frac{0,09375 \delta^5 q}{(1,5 \delta^2 + q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)} \right\},$$

а все остальные коэффициенты этого вида — из следующего:

$$[d_i f_T \cdot (3n + i - 1)]_{i=2}^k = (k - i + 1) \left\{ -0,5 \delta - \frac{0,25 \delta^3}{\eta} - \frac{0,5 \delta q}{\eta} - \frac{0,125 \delta q}{\eta} - \frac{0,5 \delta^2 q \nu}{Y} \cdot [d_{i-1} f_T \cdot (3n + i - 2)] \right\}.$$

Однако с достаточной для практических целей точностью можно принять

$$[d_i f_T \cdot (3n + i - 1)]_{i=1}^k = -\frac{2}{3} \delta (k - i + 1).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^k [d_i f_T \cdot (3n + i - 1)]^2 = \frac{4 \delta^2 \eta \nu}{9Y} \cdot \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}. \quad (34)$$

Выражения для коэффициентов остальных видов уравнений очень громоздки, поэтому приводим их в окончательном виде, спустив ряд преобразований

$$\sum_{i=1}^n \frac{[e_i f_T \cdot (4n + i - 1)]^2}{[e_i e_i \cdot (4n + i - 1)]} = \frac{\delta^2 \nu}{5q(2,5\delta^2 + q)} \cdot \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} -$$

$$-\frac{0,63\delta^2 \nu}{q(2,5\delta^2 + q)} \cdot \frac{k(k+1)}{2} + \frac{0,5\delta^2 \nu}{q(2,5\delta^2 + q)} \cdot k; \quad (35)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{[g_i f_T \cdot (5n + i - 1)]^2}{[g_i g_i \cdot (5n + i - 1)]} + \sum_{i=1}^n \frac{[h_i f_T \cdot (6n + i - 1)]^2}{[h_i h_i \cdot (6n + i - 1)]} =$$

$$=\frac{0,5\delta^2(0,75\delta^2 + q)}{3(1,74\delta^2 + q)(0,5\delta^2 + q)} \cdot k. \quad (36)$$

Для условного уравнения дирекционных углов

$$[j f_T \cdot 7n] = -\frac{q}{0,5\delta^2 + q} \cdot \frac{k^2}{2}.$$

С учетом (17) получаем

$$\frac{[j f_T \cdot 7n]^2}{[j j \cdot 7n]} = \frac{b}{0,5\delta^2 + q} \cdot \frac{k^4}{4n}. \quad (37)$$

Из условных уравнений координат на величину обратного веса функции направления диагонали влияет только условие абсцисс

$$\frac{[f_T \cdot (7n+1)]^2}{[f f \cdot (7n+1)]} = \frac{0,855(q+0,037)}{q+2,226} \cdot \frac{k^2(k+1)^2(4n-2k-1)^2}{27n^2(n+1)}. \quad (38)$$

Зная величины (31)–(38), можно получить приближенную формулу для определения обратного веса функции направления диагонали

$$\frac{1}{P_T} = \frac{q}{q+2,226} \cdot \frac{k^3(4n-3k)}{12n} + \frac{0,475q}{q+1,113} \cdot k -$$

$$-\frac{0,855(q+0,037)}{q+2,226} \cdot \frac{k^2(k+1)^2(4n-2k-1)^2}{27n^2(n+1)}. \quad (39)$$

Значения величин $\frac{1}{P_T}$ для различных значений n , k и q , вычисленные по формуле (39) и полученные из решения систем нормальных уравнений по схеме Гаусса, приведены в таблице.

Из таблицы видно, что обратные веса $\frac{1}{P_L}$ и $\frac{1}{P_T}$ определяются по

формулам (30) и (39) с достаточной степенью точности, следовательно, этими формулами можно пользоваться при предварительной оценке точности несвободных рядов линейно-угловой триангуляции.

ЛИТЕРАТУРА

- Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1959, № 3.