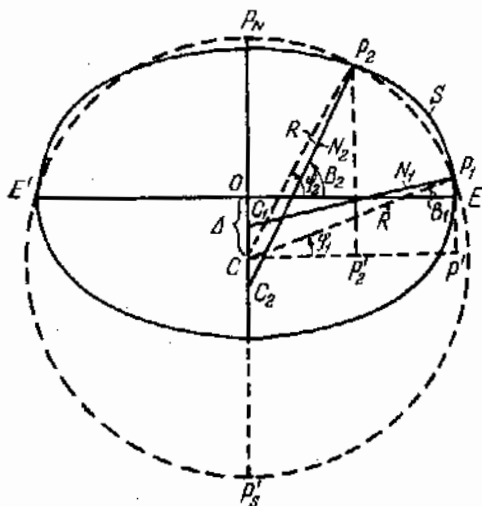


СРАВНЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ЭЛЛИпсоИДА НА ШАРЕ С ДВУМЯ НОРМАЛЬНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЯМИ

Ряд задач навигации и морской геодезии удобно решать (особенно на ЭВМ), изображая эллипсоид на шаре. Автор предлагает использовать для этого изображение эллипсоида на шаре (центр которого C лежит на оси вращения), секущем эллипсоид по двум нормальным параллелям с широтами B_1 и B_2 (рисунок).



Изображение эллипсоида на секущем шаре.

Исходя из равенства расстояний от центра шара C до точек P_1 и P_2 , нетрудно получить формулы:

а) для смещения центра шара $\Delta = OC$

$$\Delta = a e e^1 (\sin u)_m = c e^2 (\sin u)_m = b e^1 (\sin u)_m; \quad (1)$$

б) для радиуса R шара

$$R = \frac{N_i (1 - e^2) \sin B_i + \Delta}{\sin \varphi_i}; \quad (2)$$

в) для сферической широты

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{Y + \Delta}{X} = \frac{N_i (1 - e^2) \sin B_i + b e^2 (\sin u)_m}{N_i \cos B_i}. \quad (3)^*$$

* Аналогичное изображение и формулы, но в более сложном виде, рассматривал в 1975 г. Н. Беспалов [2].

В такой проекции масштабы n_1 и n_2 по двум параллелям с широтами B_1 и B_2 равны 1, а средний масштаб по меридиану

$$m_m = 1 - \frac{e^2 \cos^2 B \Delta B^2}{12} + \dots \quad (4)$$

Здесь выгодно по аналогии с 1-й конформной проекцией Гаусса эллипсоида на шаре, считать $\Delta\lambda = \Delta L$ (т. е. $\alpha - \frac{d\lambda}{dL} = 1$), а за нормальную параллель принимать среднюю параллель с широтой B_m [1]. Тогда

$$\varphi_0 = B_0 = B_m \quad (5) \quad \text{и} \quad R = N_m = f(B_m). \quad (6)$$

Если, кроме того, потребовать, чтобы масштабы по всем параллелям равнялись 1, то сферические широты нужно вычислять так:

$$\cos \varphi_i = \frac{N_i \cos B_i}{R} \quad (7)$$

При этом масштабы m по меридиану:

$$m = \frac{\sin B}{\sin \varphi}; \quad (8) \quad m_m = \frac{\sin B_m}{\sin \varphi_m} \quad (9)$$

и шар касается эллипсоида по параллелям с широтами B_1 и B_2 .

Для численного сравнения искажений (поправок) азимутов ψ и расстояний δS в этих проекциях при $\Delta\lambda = \Delta L$ были решены обратные геодезические задачи для $S = 391$ км (табл. 1).

Как видно из таблицы, отличие широт в проекции автора со средней широтой от гауссовых в три-четыре раза меньше, чем в проекции Беспалова. Формулы же гораздо проще и удобнее для программирования*.

Получим формулы для поправок азимутов в предлагаемой проекции для простейшего случая, когда

$$R = N_1, \quad \varphi_1 = B_1 \quad \text{и} \quad \lambda = l, \quad (10)$$

используя для этого:

а) формулу Г. В. Багратуни для азимута \bar{A}_{12} прямого нормального сечения при изображении эллипсоида на «сфере нормалей» [3]

$$\text{ctg } \bar{A}_{12} \sin l = \text{tg } B_2^1 \cos B_1 - \sin B_1 \cos l, \quad (11)$$

где

$$\text{tg } B_2^1 = \text{tg } B_2 \left(1 - e^2 + \frac{e^2 V_2 \sin B_1}{V_1 \sin B_2} \right); \quad (12)$$

* Широты в проекции автора отличаются от широт в проекции Беспалова потому, что радиусы N_m и $N_{cp} = \frac{1}{2}(N_1 \pm N_2)$ отличаются от радиуса шара R у Беспалова на величину порядка $(\Delta_m - \Delta_{cp}) \sin B_m = [N_m e^2 \sin B_m - \frac{1}{2}(N_1 e^2 \sin^2 B_1 + N_2 e^2 \sin^2 B_2)] \sin B_m$. В примере вычислений $R = 6391501$, $N_m = 6391512$ и $N_{cp} = 6391509$ м.

Результаты решения обратных геодезических задач

Проекция

Значения	Проекция						
	1. Гаусса при $R=N$, m	2. Бессилова	$\delta\varphi = \varphi_s - \varphi_1$	3. Автора при $R=N$, m	$\delta\varphi = \varphi_s - \varphi_1$	4. Автора при $R = \frac{1}{2}(N_1 + N_2)$	5. Автора при $R=N$
φ_1	50° 40' 11,988"	11,832"	-0,156"	12,097"	+0,109"	12,035"	00,000"
φ_2	53 09 48,972	48,827	-0,145	49,064	-0,092	49,007	38,003
$\Delta\varphi$	2 29 36,984	36,995	+0,011	36,967	0,017	36,972	38,003
φ_m	51 55 00,480	00,380	-0,150	00,580	-0,100	00,521	49,001
$\delta A_{12} =$ $= A_{12} - a_{12}$	+0,013	-0,128		+0,082		+0,033	-4,201
$\delta A_{31} =$ $= A_{31} - a_{31}$	+0,011	-0,128		+0,082		+0,033	-4,697
$\delta S =$ $= S' - S$	-0,32м	-0,09м		-0,41м		+0,32м	+8,28м
$\delta \Delta X$	+0,05	-0,04		-0,48		-0,43*	+11,63

* С учетом среднего масштаба по меридиану m , получим $\delta \Delta X = 0,01$ м.

б) формулу для «сферического азимута» α_{12} дуги большого круга на шаре в равнопромежуточной проекции автора

$$\operatorname{ctg} \alpha_{12} \sin l = \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos l. \quad (13)$$

Вычтем выражение (13) из (11) и с учетом того, что $\varphi_1 = B_1$, получим

$$\begin{aligned} \sin(\bar{A}_{12} - \alpha_{12}) = & [\operatorname{tg} B_2^1 - (\cos B_2^1 - \cos \varphi_2) - \\ & - \cos l (\sin B_2^1 - \sin \varphi_2)] \end{aligned} \quad (14)$$

или (после разложения в ряд Тейлора)

$$\begin{aligned} (\bar{A}_{12} - \alpha_{12})'' \simeq & (B_2^1 - \varphi_2)'' \cos B_1 \sec \varphi_2 \times \\ & \times \sec B_2^1 \sin^2 \bar{A}_{12} \operatorname{cosec} l. \end{aligned} \quad (15)$$

Для обратного азимута прямого нормального сечения \bar{A}_{21} и обратного сферического азимута α_{21} запишем формулы:

$$\operatorname{ctg} A_{21} \sin l = \operatorname{tg} B_1 \cos B_2^1 - \sin B_2^1 \cos l; \quad (16)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_{21} \sin l = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos l. \quad (17)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sin(\bar{A}_{21} - \alpha_{21}) = & \sin^2 \bar{A}_{21} \operatorname{cosec} l [\operatorname{tg} B_1 (\cos B_2^1 - \cos \varphi_2) - \\ & - \cos l (\sin B_2^1 - \sin \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (18)$$

После разложения скобок в ряд Тейлора получим

$$\begin{aligned} (\bar{A}_{21} - \alpha_{21})'' \simeq & (B_2^1 - \varphi_2)'' \sin^2 \bar{A}_{21} \operatorname{cosec} l \times \\ & \times (\operatorname{tg} B_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cos l) \end{aligned} \quad (19)$$

или

$$(\bar{A}_{21} - \alpha_{21})'' \simeq (B_2^1 - \varphi_2)'' \sin^2 \bar{A}_{21} \operatorname{cosec} l \sec B_1 \cos \sigma. \quad (20)$$

Однако для перехода к азимутам A_{12} и A_{21} геодезической линии нужно еще учесть поправки $-\Delta$ и $+\Delta$ за углы между прямым нормальным сечением и геодезической линией, где [3]

$$\Delta'' \simeq \frac{e^2 \rho''}{4N_m^2} S^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{12} + \dots \quad (21)$$

Для примера, приведенного выше, при $B_2^1 = 53^\circ 09' 37,639''$ и $\Delta = 0,174''$ (из работы [1]) и при $R = N_1$, $\varphi_1 = B_1 = 50^\circ 40' 00,000''$, $\varphi_2 = 53^\circ 09' 38,003''$ (табл. 2) получаем $A_{12} - \alpha_{12} = 4,13''$; $A_{21} - \alpha_{21} = -4,64''$ (см. табл. 2).

Вычисление поправок азимутов

$\lg(B_1 - \varphi_2)''$	9,561 _n	$(B_2' - \varphi_2)''$	-0,364''	A_{12}	43°08'03,57'' 0,17''	$(\bar{A}_{12} - \alpha_2)''$	-4,30''
$\lg \cos B_1$	9,802	$\lg(B_2 - \varphi_2)''$	9,561	\bar{A}_{12}	43°08'03,74'' 4,38''	+Δ	0,17''
$\lg \sec \varphi_2$	0,222	$\lg \cos \sigma$	9,999	α_{12}	43°07'59,36''	δA_{12}	-4,13''
$\lg \sec B_2$	0,222	$\lg \operatorname{cosec} l$	1,156			д.б. δA_{12}	-4,21''
$\lg \sin^2 A_{12}$	9,670	$\lg \sin^2 A_{21}$	9,718	A_{21}	226°17'02,47'' 0,34''	$(\bar{A}_{21} - \alpha_{12})''$	-4,30''
$\lg \operatorname{cosec} l$	1,156	$\lg \sec B_1$	0,198	\bar{A}_{21}	226°17'02,13'' 4,35''	-2Δ	-0,34''
$\lg(\bar{A}_{12} - \alpha_{12})''$	0,633 _n	$\lg(A_{21} - \alpha_{21})''$	0,632	α_{21}	226°16'57,78''	δA_{21}	-4,64''
$(\bar{A}_{12} - \alpha_{12})''$	4,30	$(A_2 - \alpha_{21})''$	-4,30''			д.б. δA_{21}	-4,09''

Формулы (15) и (20) обеспечивают точность порядка $0,1''$ при расстояниях до 300—400 км и могут быть использованы в морской геодезии и навигации.

Список литературы: 1. *Буткевич А. В.* Исследования по решению вычислительных задач сферической геодезии. М., Недра, 1964. 2. *Беспалов Н. А.* Решение главных геодезических задач на нерегулярной поверхности. — Изв. вузов СССР. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, № 1. 3. *Рабинович Б. Н.* Практикум по высшей геодезии. М., Геодезиздат, 1951.

Работа поступила 16 марта 1978 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.