

И. И. МИЩЕНКО

Львовский политехнический институт

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МАРШРУТНЫХ СЕТЕЙ АЭРОФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК СНИМКОВ

Исследованию систематических ошибок аэроснимков уделяется в настоящее время большое внимание. Однако оценить тот или иной способ учета систематических ошибок можно лишь зная метод оценки их влияния на точность фотограмметрических построений.

В данной работе приведено общее решение задачи оценки точности сетей аэрофототриангуляции при наличии систематических ошибок снимков для метода частично зависимых моделей (маршрутные сети). Ход решения изложен только для высотных сетей, поскольку его решение для плановых сетей в принципе аналогично.

Поставленную задачу разбивают на два этапа:

1) получение для остаточной ошибки уравненного маршрута общей формулы, не зависящей от числа опознаков и вида полинома, описывающего деформацию маршрута;

2) определение количественных характеристик полученной функции.

Как известно, остаточная ошибка уравненного маршрута высотной сети определяется по формуле [2]

$$\delta Z_k = \Delta Z_{\phi_k} - \Delta Z_{v_k}, \quad (1)$$

где ΔZ_{ϕ_k} — деформация свободного ряда по высоте, вызываемая ошибками снимков; ΔZ_{v_k} — поправка, вычисляемая по найденным коэффициентам полинома деформации маршрута; δZ_k — остаточная ошибка уравненного маршрута; k — номер модели, в которой лежит точка, имеющая деформацию ΔZ_{ϕ_k} .

Функция ΔZ_{ϕ_k} , описывающая деформацию высот свободного ряда для метода частично зависимых моделей, выведена

Р. П. Овсянниковым [2] и может быть после некоторых преобразований представлена в виде

$$\begin{aligned} \Delta Z_{\Phi_k} = & C_0 + K_1 \|d\alpha'_2 - d\alpha'_1\|_i + K_2 \|d\alpha'_{2_i}\| + K_3 \|d\omega'_i\| + \\ & + K_4 \|\Delta P_i\| + \frac{1}{2} Y_k (d\omega'_{k+1} - d\omega'_k) + \frac{1}{2} Y_k \frac{H}{B} \{(d\alpha'_2 - d\alpha'_1)_{k+1} + \\ & + (d\alpha'_2 - d\alpha'_1)_k\} - \frac{H}{8p} \Delta P_{(k+1)} + \frac{H}{2p} (dp_k + dp_{k+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\|(d\alpha'_2 - d\alpha'_1)_i\|$, $\|d\alpha'_{2_i}\|$, $\|d\omega'_i\|$, $\|\Delta P_i\|$ — матрицы-столбцы, элементами которых являются соответствующие ошибки элементов взаимного ориентирования снимков (ЭВО) и функции ΔP_i ошибок параллаксов связующих точек 1, 2, 3 в i -х звеньях; K_g — матрицы-строки, элементами которых служат коэффициенты при соответствующих ошибках; $C_0 = -\frac{B}{p^2} f^2 (d\alpha'_2 - d\alpha'_1)_1 - B d\alpha'_{2(1)}$;

$$\Delta P_i = 2(dp_i - dp_{i-1})_1 + (dp_i - dp_{i-1})_3 + (dp_i - dp_{i-1})_5.$$

Очевидно, матрицы K_g будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} K_1 = B \|(k-1)(k-2) \cdots 1\|_{1, k-1}; \quad K_2 = \|BB \cdots B\|_{1, k}; \\ K_3 = \|Y_k Y_k \cdots Y_k\|_{1, k}; \quad K_4 = \left\| \begin{array}{c} -\frac{H}{4p} - \frac{H}{4p} \cdots - \frac{H}{4p} \\ \hline \end{array} \right\|_{1, k-1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Что касается величин $d\alpha'_{1_i}$, $d\alpha'_{2_i}$, ..., dp_i , то в нашем случае это искажения ЭВО и параллаксов, обусловленные систематическими ошибками аэроснимков. Вследствие нарушения стандартного положения точек и колебания рельефа местности искажения $d\alpha'_{1_i}$, $d\alpha'_{2_i}$, ..., dp_i меняются от модели к модели и представляют случайные величины с математическим ожиданием, не равным нулю.

При уравнивании сети искомые коэффициенты полинома деформации, как известно, определяют по формуле

$$C = QA' \Delta Z, \quad (4)$$

где C — матрица-столбец искоемых коэффициентов; Q — матрица весовых коэффициентов; A' — транспонированная матрица коэффициентов уравнений погрешностей; ΔZ — матрица-столбец свободных членов.

Каждый элемент матрицы ΔZ представляет выражение (2), при этом индекс k — номер звена, в котором расположен соответствующий опознак.

$$\begin{aligned}
C = & M_0 \| C_0 \| + M_1 (l, n-1) \| (dx'_2 - dx'_1)_i \|_{(n-1, 1)} + M_2 (l, n) \| \times \\
& \times dx'_{2i} \|_{(n, 1)} + M_3 (l, n) \| d\omega'_i \|_{(n, 1)} + M_4 (l, n-1) \| \Delta p_l \|_{(n-1, 1)} + \\
& + M_5 (l, m) \| d\omega'_{k_{j+1}} - d\omega'_{k_j} \|_{(m, 1)} + M_6 (l, m) \| (dx'_2 - dx'_1)_{k_{j+1}} + \\
& + (dx'_2 - dx'_1)_{k_j} \| + M_7 (l, m) \| \Delta P_{k_{j+1}} \|_{(m, 1)} + \\
& + M_8 (l, m) \| dp_{k_{j+1}} + dp_{k_j} \|_{(m, 1)}, \quad (5)
\end{aligned}$$

где l — число искомым коэффициентов полинома деформации; n — число звеньев в маршруте или номер звена, в котором лежит последний опознак; i — номер промежуточного звена; m — число опознаков; j — номер опознака ($j=1, 2, \dots, m$); k_j — номер звена, в котором лежит j -й опознак; нижние индексы в круглых скобках указывают на порядок матриц.

Структуру матриц M_g , согласно выражениям (2) и (4), запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned}
m_0 (l' j) &= Q_{l' 1} + Q_{l' 2} X_j + Q_{l' 3} Y_j + Q_{l' 4} X_j Y_j + \dots; \\
m_1 (l' i) &= B \sum_{j_{\text{нач}}}^m (Q_{l' 1} + Q_{l' 2} X_j + Q_{l' 3} Y_j + \\
&+ Q_{l' 4} X_j Y_j + \dots) (k_j - i); \\
m_2 (l' i) &= B \sum_{j_{\text{нач}}}^m (Q_{l' 1} + Q_{l' 2} X_j + Q_{l' 3} Y_j + \\
&+ Q_{l' 4} X_j Y_j + \dots); \\
m_3 (l' i) &= \sum_{j_{\text{нач}}}^m (Q_{l' 1} + Q_{l' 2} X_j + Q_{l' 3} Y_j + \\
&+ Q_{l' 4} X_j Y_j + \dots) Y_j; \\
m_4 (l' i) &= - \sum_{j_{\text{нач}}}^m (Q_{l' 1} + Q_{l' 2} X_j + Q_{l' 3} Y_j + \\
&+ Q_{l' 4} X_j Y_j + \dots) \frac{H}{4p}; \\
m_5 (l' j) &= m_0 (l' j) \frac{1}{2} Y_{k_j}; \quad m_6 (l' j) = m_0 (l' j) \frac{1}{2} Y_{k_j} \frac{H}{B}; \\
m_7 (l' j) &= m_0 (l' j) \frac{H}{8p}; \quad m_8 (l' j) = m_0 (l' j) \cdot \frac{H}{2p}.
\end{aligned} \right\} (6)$$

Здесь $m_0(l' j) \dots m_8(l' j)$ — элементы матриц M_0, \dots, M_8 , находящиеся в l' -й строке и j -м столбце; $Q_{(l' i)}$ — весовые коэффициенты, являющиеся элементами матрицы Q .

В данных формулах число слагаемых в круглых скобках зависит от вида полинома деформации, верхние границы сумм определяются числом опознаков, а нижние границы являются функцией номера столбца. Переменное значение $j_{\text{нач}}$ определяется структурой матриц $K_1 \dots K_4$ и в соответствии с этим $j_{\text{нач}}$ должно отвечать условию $k_{j_{\text{нач}}} - i > 0$.

Очевидно, значение каждого коэффициента полинома деформации определяется формулой, аналогичной (5), но в этом случае матрицы M_g заменяются соответствующими строками, номера которых равны номерам искомым коэффициентов.

Имея значения коэффициентов C_i , определим величину ΔZ_{v_k} , входящую в формулу (1).

Как известно,

$$\Delta Z_{v_k} = C_0 + C_1 X_{\phi_k} + C_2 Y_{\phi_k} + C_3 X_{\phi_k} Y_{\phi_k} + \dots \quad (7)$$

Заменив в формуле (7) C_i их выражениями из формулы (5), не трудно видеть, что ΔZ_{v_k} будет представлять выражение, аналогичное (5), но матрицы M_g в нем заменятся на матрицы-строки L_g . Структура матриц L_g описывается выражениями

$$L_{g(1, n)} = (L_g^{(1)} + L_g^{(2)} X_{\phi_k} + L_g^{(3)} Y_{\phi_k} + L_g^{(4)} X_{\phi_k} Y_{\phi_k} + \dots), \quad (8)$$

где $L_g^{(e')}$ — строка с номером l' матрицы M_g ; $g=1, 2, \dots, 8$; k — номер звена, в котором лежит определяемая точка; X_{ϕ_k} , Y_{ϕ_k} — фотограмметрические координаты определяемой точки.

Согласно формулам (6) и (8), i -й элемент матрицы-строки L_g получаем в результате суммирования элементов i -го столбца соответствующей матрицы M_g . При этом, согласно формуле (7), первые строки матриц M_g предварительно умножаем на единицу, вторые — на X_{ϕ_k} , третьи — на Y_{ϕ_k} и т. д.

Элементы матриц L_g показывают, на сколько изменится влияние соответствующих ошибок после уравнивания маршрута.

С учетом формул (2), (5) и (8) выражение (1) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \delta Z_k = & N_{1(1, n-1)} \| (d\alpha'_2 - d\alpha'_1)_i \|_{(n-1, 1)} + N_{2(1, n)} \times \\ & \times \| d\alpha'_2 \|_{(n, 1)} + N_{3(1, n)} \| d\omega'_i \|_{(n, 1)} + N_{4(1, n-1)} \times \\ & \times \| \Delta P_i \|_{(n-1, 1)} + N_{5(1, m+1)} \| (d\omega'_{k_{j+1}} - d\omega'_{k_j}) \|_{(m+1, 1)} + \\ & + N_{6(1, m+1)} \| (d\alpha'_2 - d\alpha'_1)_{k_{j+1}} + (d\alpha'_2 - d\alpha'_1)_{k_j} \times \\ & \times \|_{(m+1, 1)} + N_{7(1, m+1)} \| \Delta P_{k_{j+1}} \|_{(m+1, 1)} + \\ & + N_{8(1, m+1)} \| dp_{k_{j+1}} + dp_{k_j} \|_{(m+1, 1)}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где при $g=1, 2, \dots, 4$

$$N_g = K_g - L_g. \quad (10)$$

При $g=5, \dots, 8$ все элементы матриц N_g (кроме первых) будут аналогичны соответствующим элементам матриц L_g , но взятым со знаком «минус». Первые элементы указанных матриц, согласно формуле (2), будут соответственно равны:

$$\frac{1}{2} Y_k, \frac{1}{2} Y_k \frac{H}{B}, -\frac{H}{8p}, \frac{H}{2p}.$$

Анализ полученной формулы позволяет сделать следующие выводы:

1. Остаточная ошибка уравненного маршрута описывается выражением, аналогичным выражению деформации свободного ряда: меняется лишь порядок матриц ошибок и структура матриц коэффициентов.

2. Порядок матриц ошибок определяется длиной сети и числом опознаков, а порядок и структура матриц коэффициентов (матрицы N_g), кроме того, — видом полинома деформации маршрута.

3. При заданном числе m и виде полинома деформации для получения матриц N_g необходимо выполнить следующие действия: определить матрицы M_g по формулам (6), перейти к матрицам L_g согласно формуле (8), и найти матрицы N_g согласно (10).

При числе опознаков, равном пяти, и полиноме деформации второй степени формула (9) аналогична формуле остаточной ошибки уравненного маршрута, выведенной Р. П. Овсянниковым для этих условий [2]. Таким образом, формула (9) является общей формулой остаточной ошибки уравненного маршрута для любого числа опознаков и любого вида полинома деформации.

Как отмечено выше, искажения $da'_1, da'_2, \dots, dp_i$ — это случайные величины, и, следовательно, δZ_k является функцией случайных величин. Используя известные теоремы об определении количественных характеристик функции случайных величин [1], получаем:

$$\left. \begin{aligned} M[\delta Z_k] &= \delta Z_0; \\ D[\delta Z_k] &= \sum_{i=1}^n \sum_{\xi=1}^8 \left(\frac{\partial(\delta Z_k)}{\partial \eta_{i\xi}} \right)_i^2 \cdot D[\eta_{i\xi}] + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\xi=1}^7 \sum_{\xi=\xi+1}^8 \left(\frac{\partial(\delta Z_k)}{\partial \eta_{i\xi}} \right)_i \left(\frac{\partial(\delta Z_k)}{\partial \eta_{i\xi}} \right)_i \cdot K_{\eta_{i\xi} \eta_{i\xi}} + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{\xi=1}^8 \sum_{\xi=1}^8 \left(\frac{\partial(\delta Z_k)}{\partial \eta_{i\xi}} \right)_i \left(\frac{\partial(\delta Z_k)}{\partial \eta_{j\xi}} \right)_j \cdot K_{\eta_{i\xi} \eta_{j\xi}} \end{aligned} \right\} (11)$$

Здесь $M[\delta Z_k], D[\delta Z_k]$ — математическое ожидание и дисперсия функции δZ_k ; δZ_0 — функция вида (9) от математических

строенного по точкам стандартной схемы. При правильно подобранном полиноме деформации значение $M[\delta Z_k]$ не будет превышать искажений одиночной модели.

Перейдем к отысканию корреляционных моментов формулы (11). Согласно (12), δZ_k — функция независимых случайных величин x_i и y_i . Используем правило определения дисперсии функции случайных независимых величин и сопоставим полученные выражения с формулами (11). В результате придем к следующим формулам для искомых ковариационных матриц:

$$K_{\eta_{\varepsilon(i)} \eta_{\xi(i)}} = R' \cdot R; \quad K_{\eta_{\varepsilon(i)} \eta_{\xi(j)}} = R' \cdot R_0, \quad (14)$$

где $K_{\eta_{\varepsilon(i)} \eta_{\xi(i)}}$ — ковариационная матрица, характеризующая искажения внутри модели; $K_{\eta_{\varepsilon(i)} \eta_{\xi(j)}}$ — ковариационная матрица, характеризующая искажения двух смежных моделей; R , R_0 — матрицы, элементами которых являются частные производные вида $\frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial \eta_{\xi}}{\partial y_i}$.

Структура матриц R и R_0 описывается формулами (15) и (16):

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\partial (d\alpha'_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial (d\alpha'_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial (d\omega')}{dx_1} & \dots & \frac{\partial (dp_k + dp_{k+1})}{dx_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial (d\alpha'_1)}{\partial x_6} & \frac{\partial (d\alpha'_2)}{\partial x_6} & \frac{\partial (d\omega')}{\partial x_6} & \dots & \frac{\partial (dp_k + dp_{k+1})}{\partial x_6} \\ \frac{\partial (d\alpha'_1)}{\partial y_1} & \frac{\partial (d\alpha'_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial (d\omega')}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial (dp_k + dp_{k+1})}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial (d\alpha'_1)}{\partial y_6} & \frac{\partial (d\alpha'_2)}{\partial y_6} & \frac{\partial (d\omega')}{\partial y_6} & \dots & \frac{\partial (dp_k + dp_{k+1})}{\partial y_6} \end{pmatrix}; \quad (15)$$

$$R_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial (d\alpha'_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial (d\alpha'_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial (d\omega')}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial (dp_k + dp_{k+1})}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \frac{\partial (d\alpha'_1)}{\partial x_4} & \frac{\partial (d\alpha'_2)}{\partial x_4} & \frac{\partial (d\omega')}{\partial x_4} & \dots & \frac{\partial (dp_k + dp_{k+1})}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial (d\alpha'_1)}{\partial y_6} & \frac{\partial (d\alpha'_2)}{\partial y_6} & \frac{\partial (d\omega')}{\partial y_6} & \dots & \frac{\partial (dp_k + dp_{k+1})}{\partial y_6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Таким образом, определение матриц $K_{\eta_\varepsilon(i)\eta_\zeta(i)}$ и $K_{\eta_\varepsilon(i)\eta_\zeta(j)}$ сводится фактически к определению частных производных вида $\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}$. Очевидно, эти величины постоянны для любых моделей.

Отсюда следует, что матрица $K_{\eta_\varepsilon(i)\eta_\zeta(i)}$ постоянная для всех i -х моделей, а матрица $K_{\eta_\varepsilon(i)\eta_\zeta(j)}$ сохраняет свой вид для любых смежных моделей.

Согласно формуле (11), дисперсия $D[\delta Z_h]$ есть сумма элементов матриц $K_{\eta_\varepsilon(i)\eta_\zeta(i)}$ и $K_{\eta_\varepsilon(i)\eta_\zeta(j)}$, умноженных на соответствующие коэффициенты. Аналогично выражениям (14) найдем матрицы N_I и N_{II} , элементами которых являются соответственно коэффициенты при корреляционных моментах $K_{\eta_\varepsilon(i)\eta_\zeta(i)}$ и $K_{\eta_\varepsilon(i)\eta_\zeta(j)}$:

$$N_I = N'_s \cdot N_s; \quad N_{II} = N'_s N_0, \quad (17)$$

где N_s — матрица, i -ми столбцами которой служат транспонированные матрицы N_g ; N_0 — матрица, полученная из матрицы N_s путем замены i -го столбца на $(i+1)$ -й.

Следовательно, определение дисперсии остаточной ошибки уравненного маршрута сводится к следующему: нахождению матриц R и R_0 согласно формулам (15), (16); определению матриц коэффициентов при корреляционных моментах N_I , N_{II} по формулам (17); получению ковариационных матриц по формулам (14).

Элементы матрицы R представляют собой изменения систематических искажений ЭВО и параллаксов из-за нарушения стандартного положения точек при условном значении $D[x] = D[y] = 1$. Если считать, что систематические искажения аэроснимка описываются какой-либо функцией, то при наличии данных калибровки аэроснимков получение матрицы R не представляет труда. В противном случае необходимы дополнительные эксперименты для определения ковариационных матриц.

Таким образом, описанная методика даст возможность по данным калибровки аэроснимков предвычислить ожидаемую точность построения маршрутных сетей аэрофототриангуляции.

Список литературы: 1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей, М., Физматиздат, 1958. 2. Лобанов А. Н., Овсянников Р. П., Дубиновский В. Б. Фототриангуляция с применением электронной цифровой вычислительной машины. М., Недра, 1967.

Работа поступила 12 апреля 1978 года.
Рекомендована кафедрой аэрофотогеодезии Львовского политехнического института.