УДК 528.21+550.311

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТОКСОВЫХ ПОСТОЯННЫХ ЗЕМЛИ ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ЕЕ МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

§ 1. При определении плотности вещества внутри Земли будем отправляться от обратной задачи теории потенциала, в которой по известному внешнему потенциалу $V(Q)$ масс, заключенных внутри объема τ, ограниченного данной замкнутой поверхностью σ, ищется их плотность $\delta(P)$. Последняя, таким образом, является решением интегрального уравнения первого рода

$$\int_{\tau} \frac{\delta(P)}{r_{QP}} d\tau_P = V(Q), \quad P \in \tau, \ Q \in \tau. \tag{1}$$

Определение $\delta(P)$ из уравнения (1) относится к некорректным задачам, теория приближенного решения которых к настоящему времени подробно разработана. По теореме [6, 7] уравнение (1) имеет в классе $\tilde{C}_\tau$ ($\tilde{C}_\tau$ — класс непрерывных в $\tau+\sigma$ функций, равномерно ограниченных и удовлетворяющих условию Липшица) единственное решение, если при каждом $n=2, 3, 4, \ldots$ заданы некоторые моменты искомой плотности

$$J_{pqr}(\delta) = \int_{\tau} \delta x^p y^q z^r d\tau, \ (p+q+r=n), \tag{2}$$

или линейные соотношения между ними, которые в совокупности с соотношениями, доставляемыми $(2n+1)$ стоксовыми постоянными тела τ, образуют полный комплект всех $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ моментов функции δ.

Эта теорема сводит обратную задачу (1) теории потенциала к трехмерному случаю проблемы моментов. При этом следует отметить два обстоятельства. Во-первых, дополнительная информация, необходимая для решения уравнения (1), имеет очень простой аналитический смысл и позволяет легко конструировать искомое приближенное решение. Во-вторых, если метод доказательсьтва теоремы, примененный в [6, 7], вынуждал сузить класс решений (1) выбором их из указанного многообразия $\tilde{C}_\tau$, то с точки зрения теории моментов теперь можно искать нужное нам распределение масс в τ в более широком классе — в классе функций с ограниченной вариацией, а принадлежность плотности δ земных недр именно к этому классу уже подтверждена сейсмологией. Решение задачи о распределении плотности δ внутри Земли требует, таким образом, отыскания метода получения всех моментов данного тела искомой плотности.

§ 2. Внешний потенциал тяготения Земли V^e, отличающийся от (1) только наличием в нем гравитационной постоянной f, обычно записывается в виде

$$V^e(r, \vartheta, \lambda) = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda)\, P_{nk}(\cos\vartheta)\right], \tag{3}$$

где r, ϑ, λ — геоцентрические координаты (счет долгот λ от Гринвичского меридиана); M — масса Земли; a — большая полуось общеземного эллипсоида; P_{nk} — символ присоединенных функций Лежандра; C_{nk} и S_{nk} — безразмерные стоксовы постоянные:

$$\left.\begin{matrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{matrix}\right\} = \frac{\nu_{nk}}{Ma^n}\int_\tau \delta r^n P_{nk}(\cos\vartheta)\left\{\begin{matrix}\cos k\lambda \\ \sin k\lambda\end{matrix}\right. d\tau. \tag{4}$$

Здесь τ — объем Земли и

$$\nu_{n0} = 1,\ \nu_{nk} = 2\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!} \text{ при } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Выбор в качестве дополнительной информации * именно стоксовых постоянных (4) обусловлен рядом причин.

Во-первых, каждая стоксовая постоянная выражает интегральное условие, которому должна удовлетворить плотность δ внутри Земли. Такие условия чрезвычайно просты по своей структуре.

Во-вторых, численные значения стоксовых постоянных получают сейчас довольно уверенно при обработке наблюдений за ИСЗ, см. например, [9].

В-третьих, число постоянных (4) достаточно велико (см. таблицу). Учитывая возрастающую точность наблюдений за ИСЗ и улучшение обработки этих наблюдений, можно надеяться на включение в решение задачи стоксовых постоянных и более высоких порядков.

В-четвертых, величины (4) линейным образом связаны с нужными нам моментами плотности земных недр. Принимая для последующего вместо моментов (2) безразмерные моменты вида

$$I_{pqr}(\delta) = \frac{1}{Ma^n}\int_\tau \delta x^p y^q z^r\, d\tau, \tag{5}$$

---

* С точки зрения геофизики это действительно дополнительная информация, до сих пор не используемая в должной мере при построении глобальных моделей Земли, а с точки зрения обратной задачи теории потенциала (1) — это суть единственная информация, непосредственно заключенная в самом решаемом уравнении (1), что и отмечено теоремой, упомянутой в § 1.

связываем их линейными соотношениями со стоксовыми постоянными, переходя в (4) от сферических координат к прямоугольным:

$$\sum_{p+q+r=n} \left.\begin{matrix} \alpha_{pqr} \\ \beta_{pqr} \end{matrix}\right\} I_{pqr}(\delta) = \left\{\begin{matrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{matrix}\right. . \qquad (6)$$

Уравнения вида (6) при $n=0, 1, 2, 3, 4$ приведены в [2].

Соотношения (6) дают возможность сравнительно просто найти если и не сами моменты n-го порядка, то их квадратические приближения.

Количество степенных моментов и стоксовых постоянных Земли

Порядок моментов и стоксовых постоянных	Количество						Повышение степени достоверности моментов исходной модели после ее уточнения $d=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n-1)}$
	моментов n-го порядка $l=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$	всех моментов до n-го порядка включительно $N=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$	стоксовых постоянных n-го порядка $s=2n+1$	всех стоксовых постоянных до n-го порядка включительно $S=(n+1)^2$	недостающих* моментов n-го порядка $l-s=\frac{1}{2}n(n-1)$	всех недостающих* моментов до n-го порядка включительно $N-s=\frac{n}{6}(n^2-1)$	
0	1	1	1	1	0	0	—
1	3	4	3	4	0	0	—
2	6	10	5	9	1	1	6,00
3	10	20	7	16	3	4	3,33
4	15	35	9	25	6	10	2,50
5	21	56	11	36	10	20	2,10
6	28	84	13	49	15	35	1,87
7	36	120	15	64	21	56	1,71
8	45	165	17	81	28	84	1,61
9	55	220	19	100	36	120	1,53
10	66	286	21	121	45	165	1,47
11	78	364	23	144	55	220	1,42
12	91	455	25	169	66	286	1,38
13	105	560	27	196	78	364	1,35
14	120	680	29	225	91	455	1,32
15	136	816	31	256	105	560	1,30
16	153	969	33	289	120	680	1,28
17	171	1140	35	324	136	816	1,26
18	190	1330	37	361	153	969	1,24
19	210	1540	39	400	171	1140	1,23
20	231	1771	41	441	190	1330	1,22

* недостающих — в смысле теоремы, приведенной в § 1.

§ 3. Остановимся кратко на стоксовых постоянных и моментах Земли трех низших порядков.

Постоянная нулевого порядка $C_{00}=I_{000}=1$. С учетом размерности она выражается произведением гравитационной постоянной f на массу Земли M; в настоящее время она получена с высокой степенью точности. Этот параметр необходим для вычисления средней плотности Земли $\delta_{ср}$. Неточность гравитационной постоянной сказывается именно на вычислении $\delta_{ср}$.

Стоксовые постоянные первого порядка $C_{10}=I_{001}$, $C_{11}=I_{100}$, $S_{11}=I_{010}$, характеризующие положение центра инерции Земли, не определяются по результатам наблюдений за ИСЗ. Обычно полагают $C_{10}=C_{11}=S_{11}=0$, считая, таким образом, что начало применяемой системы координат $Oxyz$ совмещено с центром масс планеты.

Постоянных второго порядка пять: C_{20}, C_{21}, S_{21}, C_{22}, S_{22}. Моментов этого порядка шесть: I_{110}, I_{101}, I_{011}, I_{200}, I_{020}, I_{002}. Две из указанных постоянных являются «запретными» с точки зрения определения их по наблюдениям за ИСЗ; они выражают непараллельность осей вращения

Земли и общеземного эллипсоида; результаты наблюдений за движениями полюсов Земли показывают, что они пренебрежимо малы. Одна из стоксовых постоянных второго порядка непосредственно выражает момент: $S_{22}=\frac{1}{2}I_{110}$, а остальные две в любой системе координат $Oxyz$ связаны со степенными моментами:

$$\left.\begin{aligned} 2C_{20} &= -I_{200}-I_{020}+2I_{002}; \\ 4C_{22} &= I_{200}-I_{020}. \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

Нам уже приходилось отмечать [7, 8], не подтверждая, правда, этого вычислениями, что в настоящее время по данным наблюдений можно легко получить полный комплект всех моментов плотности Земли второго порядка. Для этого к уравнениям (7) следует добавить еще одно, которое можно взять из астрономии, где по результатам наблюдений вычисляют постоянную прецессии P, простым образом связанную с динамическим сжатием Земли H;

$$H=\frac{C-\frac{1}{2}(A+B)}{C}, \tag{8}$$

которое, следовательно, можно полагать известным. В формуле (8) A, B, C — главные моменты инерции Земли; и если оси системы $Oxyz$ — суть главные оси инерции, то

$$A=\int\limits_{\tau}\delta\,(y^2+z^2)\,d\tau;\ B=\int\limits_{\tau}\delta\,(x^2+z^2)\,d\tau;\ C=\int\limits_{\tau}\delta\,(x^2+y^2)\,d\tau, \tag{9}$$

причем с точностью до постоянного множителя Ma^2 имеем

$$A=I_{020}+I_{002};\ B=I_{200}+I_{002};\ C=I_{200}+I_{020}. \tag{10}$$

Заметим, что, опуская у моментов инерции коэффициент, мы здесь и везде далее под главными моментами A, B, C подразумеваем безразмерные моменты, что несколько упрощает последующие расчеты; безусловно, этот множитель должен учитываться при получении размерных моментов инерции.

Выражение (8) с учетом формул (10) приводит к искомому соотношению между моментами $I_{200}, I_{020}, I_{002}$:

$$I_{200}+I_{020}-\frac{2}{1-2H}I_{002}=0. \tag{11}$$

Система отнесенных к главным осям уравнений (7) и (11), линейных относительно входящих в нее моментов, имеет определитель $\frac{8H}{1-2H}\neq 0$, поэтому, решая ее, находим

$$I_{200}=-\frac{C_{20}}{2H}+2C_{22};\ I_{020}=-\frac{C_{20}}{2H}-2C_{22};\ I_{002}=C_{20}-\frac{C_{20}}{2H}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что

$$A=C_{20}-\frac{C_{20}}{H}-2C_{22};\ B=C_{20}-\frac{C_{20}}{H}+2C_{22};\ C=-\frac{C_{20}}{H}. \tag{13}$$

Эти соотношения сохраняют силу в любой системе координат, относительно которой $C_{10}=C_{11}=S_{11}=C_{21}=S_{21}=0$; но тогда в случае (13) $A=A_x$, $B=B_y$ суть моменты инерции относительно осей Ox и Oy, а C по-прежнему имеет смысл главного момента инерции.

Последнее из выражений (13) всегда используется при построении сферически симметричных моделей Земли, а два предыдущих в несколько измененном виде приведены были И. Д. Жонголовичем [2]. Здесь же они, как и (12), получены в соответствии с требованиями упомянутой выше теоремы единственности решения обратной задачи (1) теории потенциала. Однако мы не располагаем дополнительной информацией, позволяющей аналогично находить и моменты более высоких порядков (при $n>2$). Поэтому ниже опишем метод получения квадратических приближений моментов при любом n.

Приведем результаты числового подсчета по формулам (13), взяв C_{20} и C_{22} в соответствии с [9] и положив $H=0{,}00327237$ [5],

$$A_x=0{,}329\,757;\quad B_y=0{,}329\,763;\quad C=0{,}330\,843. \tag{14}$$

Если же взять для H более предпочтительное значение $H=0{,}003\,275\,6$ [10], то имеем

$$A_x=0{,}329\,431;\quad B_y=0{,}329\,437;\quad C=0{,}330\,517. \tag{15}$$

§ 4. Как уже отмечалось, для нахождения плотности δ по ее степенным моментам при любом n нужно иметь все $l=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ моментов (5) или (2), в то время как известные стоксовые постоянные (4) порядка n дают лишь $s=2n+1$ линейных соотношений (6) между этими искомыми моментами. Без дополнительной информации величины (5) только на основе уравнений (6) найти нельзя. Однако, если считать заданным приближенное распределение масс в τ, отвечающее в среднем действительному, то тогда все нужные моменты могут быть найдены; конечно, тоже приближенно; далее мы оценим степень этого приближения. Метод данного параграфа применим к любому телу τ, создающему известный внешний потенциал; однако, ниже за τ принимается тело Земли.

Итак, пусть известна некоторая сферическая симметричная модель Земли, назовем ее исходной. Для нее можно вычислить все моменты (5) любого порядка n. Обозначим их символом $I^{\text{выч}}_{pqr}$. Тогда переход от x, y, z к r, ϑ, λ в (5) дает

$$I^{\text{выч}}_{pqr}=\frac{1}{Ma^n}\,I^{(\vartheta)}_{pqr}\,I^{(\lambda)}_{pqr}\,I^{(r)}_{n}, \tag{16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I^{(\vartheta)}_{pqr} &= \int_0^{\pi}\sin^{p+q+1}\tau\cos^r\vartheta\,d\vartheta \\ I^{(\lambda)}_{pqr} &= \int_0^{2\pi}\sin^{q}\lambda\cos^{p}\lambda\,d\lambda \\ I^{(r)}_{n} &= \int_0^{R}\delta r^{n+2}\,dr = R^{n+3}\int_0^{1}\delta\rho^{n+2}\,d\rho \end{aligned}\right\}, \tag{16a}$$

в $I^{(r)}_n$ сделан переход к безразмерному радиусу $\rho=\frac{r}{R}$.

При любом $n=p+q+r$ интегралы $I_{pqr}^{(\theta)}$ и $I_{pqr}^{(\lambda)}$ вычисляются элементарно, а интеграл $I_n^{(r)}$ должен браться численно для каждой исходной модели.

Таким образом, имеем теперь приближенные значения моментов Земли $I_{pqr}^{\text{выч}}$ и точные значения C_{nk} и S_{nk} правых частей линейных соотношений (6) между искомыми моментами I_{pqr}.

Подстановка моментов (16) в соотношении (6) показывает, что $C_{nk}^{\text{выч}} \neq C_{nk}$ и $S_{nk}^{\text{выч}} \neq S_{nk}$; и для того, чтобы соотношения (6) были бы строго удовлетворены, необходимо в моменты (16) ввести некоторые поправки v_{pqr}. Приняв

$$I_{pqr} = I_{pqr}^{\text{выч}} + v_{pqr} \tag{17}$$

при фиксированном n имеем $l=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ искомых поправок $v_{pqr}= =v_j (j=1, 2, \ldots, l)$, удовлетворяющих $s=2n+1$ линейным уравнениям связи

$$\sum_{p+q+r=n} \left.\begin{matrix} \alpha_{pqr} \\ \beta_{pqr} \end{matrix}\right\} v_{pqr} + w_i = 0, \ (i=1, 2, \ldots, s), \tag{18}$$

вытекающим из (6). В (18) буквой w_i обозначены «невязки»

$$w_i = C_{nk}^{\text{выч}} - C_{nk}, \text{ либо } w_i = S_{nk}^{\text{выч}} - S_{nk}. \tag{19}$$

Отметим, что в случае сферически симметричной исходной модели все

$$C_{nk}^{\text{выч}} = 0 \text{ и } S_{nk}^{\text{выч}} = 0, \text{ кроме } C_{00}^{\text{выч}} = 1.$$

Замечая, что в уравнениях поправок (17) $I_{pqr}^{\text{выч}}$ соответствуют правдоподобной модели Земли, а I_{pqr} — реальной Земле, то естественно теперь искать нужные поправки под дополнительным условием их малости, например, под условием

$$\sum_{j=1}^{l} v_j^2 = \min. \tag{20}$$

Реализация этого условия должна привести к таким поправкам v_j, которые — после введения их в вычисленные моменты — обратят все невязки в нули, то есть такая система поправок приведет к выполнению всех условий связи (18). Таким образом, приходим к известной задаче на условный экстремум, для решения которой по методу Лагранжа в способе наименьших квадратов [4, 11] разработаны очень удобные вычислительные схемы.

Записывая уравнения связи в виде

$$\left.\begin{matrix} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_l v_l + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_l v_l + w_2 = 0 \\ \vdots \\ g_1 v_1 + g_2 v_2 + \cdots + g_l v_l + w_s = 0 \end{matrix}\right\}, \tag{21}$$

и составляя уравнения поправок

$$\left.\begin{matrix} v_1 = a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + \cdots + g_1 \lambda_s \\ v_2 = a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \cdots + g_2 \lambda_s \\ \vdots \\ v_l = a_l \lambda_1 + b_l \lambda_2 + \cdots + g_l \lambda_s \end{matrix}\right\}, \tag{22}$$

дающие выражения их через коррелаты λ_i, имеем для определения последних так называемую нормальную систему коррелат

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\lambda_1+[ab]\lambda_2+\cdots+[ag]\lambda_s+w_1=0\\ [ba]\lambda_1+[bb]\lambda_2+\cdots+[bg]\lambda_s+w_2=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [ga]\lambda_1+[gb]\lambda_2+\cdots+[gg]\lambda_s+w=0\end{array}\right\}. \qquad (23)$$

Коррелаты λ_i из системы (23) позволяют по формулам (22) вычислить поправки $v_j=v_{pqr}$, по которым легко находятся в соответствии с (17) все моменты I_{pqr} порядка n.

Формулы (23), (22) и (19) показывают, что определяемые указанным способом квадратические приближения моментов I_{pqr} порядка n линейно выражаются через стоксовы постоянные C_{nk} и S_{nk} этого порядка. Из указанных формул следует также, что излагаемый способ не дает решения задачи для тела, все стоксовы постоянные которого, кроме C_{00}, равны нулю. Такой исключительный случай соответствует искомому сферически симметричному распределению плотности.

§ 5. Методом § 4 определяются все моменты до некоторого фиксированного порядка n. Если они удовлетворяют условиям разрешимости и единственности трехмерной проблемы моментов *, то построение ее решения доставляет искомое распределение плотности в теле Земли. Но это решение, во-первых, неоднозначно и, во-вторых, приближенно. Причинами этого являются выбор исходной модели и некоторая произвольность принятого выше условия (20). Однако последнее настолько хорошо зарекомендовало себя в теории приближения функций (как и во многих других случаях), что в настоящее время используется и при решении некорректных задач, например, в двойственном методе регуляризации [3]. Правда, у нас это условие наложено не непосредственно на само уравнение (1), а на каждую совокупность моментов n-го порядка искомого решения. За счет этого быстро достигается цель, так как привлекается еще дополнительная информация в виде исходного распределения плотности, отвечающего в среднем реальной Земле. Вычисляя распределение плотности земных недр в согласии с § 4, мы добиваемся строгого выполнения большого числа дополнительных условий, накладываемых результатами наблюдений на распределение плотности, сохраняя при этом основные свойства исходной модели и приближая ее к действительному строению Земли. Следовательно, метод § 4 — это метод улучшения существующих моделей Земли.

Теперь, кстати, легко усматривается физическое значение введенного и использованного общего условия (20): уравнивая под этим условием моменты исходной модели, мы так перераспределяем ее массы, что «уравненное» распределение масс описывает такую улучшенную модель Земли, стоксовы постоянные которой совпадают с их значениями, полученными из наблюдений для Земли как планеты.

Улучшенные модели Земли, полученные в соответствии с изложенной здесь методике, допускают априорную оценку их сравнительно с используемыми исходными моделями Земли. Для любой из них можно вычислить ее моменты $I^{\text{выч}}_{pqr}(\delta)$. Улучшая эту модель изложенным методом, мы добиваемся выполнения дополнительных условий (6), за счет чего при каждом n степень достоверности (вес) получаемых уравновешенных моментов увеличивается в d раз, причем d дается известной формулой способа наименьших квадратов [11]:

$$d=\frac{l}{l-s}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n-1)}>1, \qquad (24)$$

---

* Из вычислений, доведенных до $n=4$, следует, что эти условия выполняются.

расчеты по которой (табл. 1) показывают, что при использовании моментов до пятого-шестого порядка вес их увеличивается не менее, чем в два раза; при учете моментов до девятого-десятого порядков — в полтора раза. Таким образом, в любом случае получаем уточненную модель Земли, степень близости которой к действительной Земле определенно выше, нежели исходной сферически симметричной модели.

Наконец, отметим, что конструируемые описанным образом трехмерные модели Земли допускают естественный контроль правильности их получения. В настоящее время уже разработана теория собственных колебаний для сферически несимметричных моделей Земли [1 и др.]. Значит, есть возможность рассчитать частоты собственных колебаний получаемых здесь моделей Земли и сравнить их с действительными. Это позволит совершенно объективно определить качества моделей получаемых предлагаемым методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жарков В. Н., Любимов В. М. Теория крутильных колебаний для сферически несимметричных моделей Земли. — «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1970, № 2.

2. Жонголович И. Д. Потенциал земного притяжения. Бюл. ИТА, 6, № 8/81. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1957.

3. Иванов В. К. О приближенном решении операторных уравнений 1 рода. — «Журнал вычислительной математики и математической физики», т. 6, 1966, № 6.

4. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.

5. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли. М., «Недра», 1965.

6. Мещеряков Г. А. Об единственности решения одной обратной задачи теории потенциала. — «Сибирский математический журнал», 11, 1970, № 5.

7. Мещеряков Г. А. О корректности одной обратной задачи теории потенциала. — «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1969, № 8.

8. Мещеряков Г. А. О горизонтальных неоднородностях в теле Земли. — «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1970, № 3.

9. Стандартная Земля. М., «Мир», 1969.

10. Фундаментальные постоянные астрономии. «Мир», 1967.

11. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М., Геодезиздат, 1958.

Работа поступила в редколлегию 2 октября 1973 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.