УДК 528.14

И. Ф. МОНИН

О ТИПОВОМ УСЛОВНОМ УРАВНЕНИИ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

Триангуляция уравнивается либо по методу условных измерений, либо по методу посредственных измерений. Выбор способа зависит от количества нормальных уравнений. В сложных сетях триангуляции возникают сложные условные уравнения (например, базисные, уравнения координат, иногда — необычные условные уравнения). Составление их сопряжено с некоторыми трудностями [1, 2].

Известно, что условные уравнения в сетях триангуляции можно написать не на основании геометрических условий, возникающих в сетях, а при помощи уравнений поправок. Так, написав для каждого измеренного угла уравнение поправок, получим систему параметрических уравнений. Исключив в них поправки в координаты (или параметры), найдем условные уравнения, число которых равно числу избыточных измерений. Эти условные уравнения можно разделить на простые и более сложные, типовые (похожие по своей структуре), которые составляются значительно проще, чем координатные или базисные условия. Они также удобнее для применения ЭВМ.

Рассмотрим составление условных уравнений в триангуляции на основе уравнений поправок применительно к конкретным сетям. Прежде всего составим уравнение поправок для измеренного угла, для чего введем следующие обозначения: α, β, γ — измеренные углы в плоских треугольниках триангуляции; (α), (β), (γ) — наивероятнейшие поправки в углы; A,

dA — приближенные дирекционные углы линий и их поправки; ξ, η — поправки в плоские координаты пунктов. Тогда, обращаясь к рис. 1, можно написать равенство

$$\gamma+(\gamma)=A_{31}+dA_{31}-A_{32}-dA_{32},$$

или $\quad (\gamma)=dA_{31}-dA_{32}+l_{\gamma}; \quad (1) \qquad l_{\gamma}=A_{31}-A_{32}-\gamma. \quad (2)$

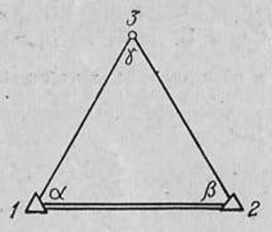

Рис. 1. Сеть триангуляции с тремя измеряемыми углами.

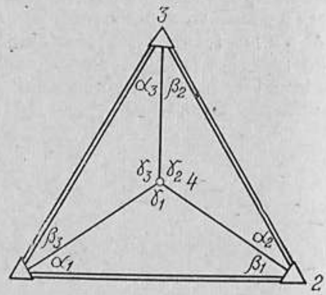

Рис. 2. Сеть триангуляции с девятью измеряемыми углами.

Уравнение (1) — это начальное уравнение поправок для любого угла в триангуляции. Поправка в приближенный дирекционный угол в общем виде выражается так:

$$dA_{kn}=a_{kn}\xi_k+b_{kn}\eta_k+a_{nk}\xi_n+b_{nk}\eta_n, \tag{3}$$

где

$$a_{kn}=\rho''\frac{\sin A_{kn}}{S_{kn}}, \quad b_{kn}=-\rho''\frac{\cos A_{kn}}{S_{kn}}, \tag{4}$$

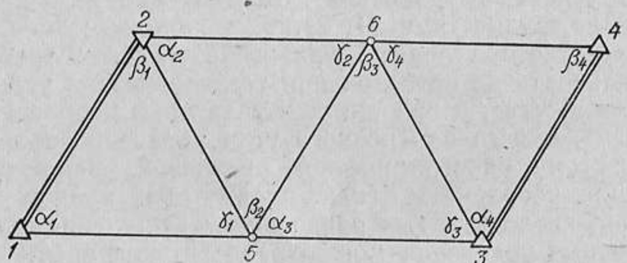

Рис. 3. Сеть триангуляции с двенадцатью измеряемыми углами.

S_{kn} — длина между пунктами k и n, ρ'' — число секунд в радиане. На рис. 1, 2, 3 треугольниками обозначены пункты с известными координатами, кружочками — определяемые пункты.

Следовательно, уравнение поправок для измеренного угла имеет вид:

$$(\gamma)=a_{31}\xi_3+b_{31}\eta_3-a_{32}\xi_3-b_{32}\eta_3+l_{\gamma}. \tag{5}$$

Составим теперь уравнение, возникающее в треугольнике, на основании уравнений поправок. Напишем уравнения поправок для углов α и β.

$$(\alpha)=-a_{31}\xi_3-b_{31}\eta_3, \quad (6) \qquad (\beta)=a_{32}\xi_3+b_{32}\eta_3. \quad (7)$$

Исключая в уравнениях (5), (6), (7) поправки в координаты $\xi_3\eta_3$, получаем искомое условное уравнение:

$$(\alpha)+(\beta)+(\gamma)+w=0; \quad (8) \qquad w=-l_\gamma. \quad (9)$$

Чтобы убедиться в его правильности, преобразуем свободный член w:

$$-w=l_\gamma=A_{31}-A_{32}-\gamma; \quad A_{12}=A_{21}-180°;$$

$$A_{31}=A_{12}-\alpha+180°; \quad A_{32}=A_{21}+\beta-180°;$$

$$-w=-180°+180°+180°-(\alpha+\beta+\gamma); \quad w=\alpha+\beta+\gamma-180°. \quad (10)$$

Уравнение (8) со свободным членом, определяемым по формуле (10), — это известное условное уравнение фигуры.

В триангуляционной сети, показанной на рис. 2, возникает 7 условных уравнений. Составим их, используя следующие уравнения поправок:

$$(\alpha_1)=-a_{41}\xi_4-b_{41}\eta_4; \quad (\beta_1)=a_{42}\xi_4+b_{42}\eta_4; \qquad (11)$$

$$(\gamma_1)=a_{41}\xi_4+b_{41}\eta_4-a_{42}\xi_4-b_{42}\eta_4+l_{\gamma_1}; \quad l_{\gamma_1}=A_{41}-A_{42}-\gamma_1; \qquad (12)$$

$$(\alpha_2)=-a_{42}\xi_4-b_{42}\eta_4+l_{\alpha_2}; \quad (\beta_2)=a_{43}\xi_4+b_{43}\eta_4+l_{\beta_2}; \qquad (13)$$

$$(\gamma_2)=a_{42}\xi_4+b_{42}\eta_4-a_{43}\xi_4-b_{43}\eta_4+l_{\gamma 2}; \qquad (14)$$

$$l_{\alpha_2}=A_{23}-A_{24}-\alpha_2; \quad l_{\beta_2}=A_{34}-A_{32}-\beta_2; \quad l_{\gamma_2}=A_{31}-A_{34}-\gamma_2;$$

$$(\alpha_3)=-a_{43}\xi_4-b_{43}\eta_4; \quad (\beta_3)=a_{41}\xi_4+b_{41}\eta_4+l_{\beta_3}; \qquad (15)$$

$$(\gamma_3)=a_{43}\xi_4+b_{43}\eta_4-a_{41}\xi_4-b_{41}\eta_4+l_{\gamma_3}; \qquad (16)$$

$$l_{\beta_3}=A_{14}-A_{13}-\beta_3; \quad l_{\gamma_3}=360°-(A_{41}-A_{43})-\gamma_3.$$

Из уравнений (11) найдем ξ_4, η_4. После подстановки их в уравнения (12)—(16) и некоторых преобразований получим условные уравнения:

$$(\alpha_1)+(\beta_1)+(\gamma_1)+w_1=0; \quad w_1=-l_{\gamma_1}; \qquad (17)$$

$$(\alpha_2)+(\beta_1)+w_2=0; \quad w_2=-l_{\alpha_2}; \qquad (18)$$

$$(\beta_2)-\frac{\sin\gamma_3}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}(\beta_1)-\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3}(\alpha_1)+w_3=0;$$

$$w_3=-l_{\beta_2}; \tag{19}$$

$$(\alpha_2)+(\beta_2)+(\gamma_2)+w_4=0;\quad w_4=-(l_{\alpha_2}+l_{\beta_2}+l_{\gamma_2}); \tag{20}$$

$$(\alpha_3)+(\beta_2)+w_5=0;\quad (\alpha_1)+(\beta_3)+w_6=0;$$

$$(\alpha_3)+(\beta_3)+(\gamma_3)+w_7=0; \tag{21}$$

$$w_5=-l_{\beta_3};\quad w_6=-l_{\beta_3};\quad w_7=-(l_{\beta_3}+l_{\gamma_3}).$$

Уравнение (19) более сложное, чем остальные. Оно типовое и соответствует полюсному условному уравнению в триангуляции. Все остальные уравнения простые и отвечают условным уравнениям фигур и суммы углов.

Наконец, составим условные уравнения для сети триангуляции, изображенной на рис. 3. В ней измеряется 12 углов. Число условных уравнений равно 8. Уравнения поправок имеют следующий вид:

$$(\alpha_1)=a_{51}\xi_5+b_{51}\eta_5;\quad (\beta_1)=-a_{52}\xi_5-b_{52}\eta_5; \tag{22}$$

$$(\alpha_4)=-a_{63}\xi_6-b_{63}\eta_6;\quad (\beta_4)=a_{64}\xi_6+b_{64}\eta_6. \tag{23}$$

Мы написали уравнения поправок для углов, которые необходимы для построения сети триангуляции. Решая их, легко найти поправки в координаты ξ_5, η_5, ξ_6, η_6. Точно так же можно написать уравнения поправок для остальных 8 избыточных углов. Подставив в них поправки в координаты ξ_5, η_5, ξ_6, η_6, после некоторых преобразований получим условные уравнения:

$$(\alpha_k)+(\beta_k)+(\gamma_k)+w_k=0;\quad w_k=-(l_{\alpha_k}+l_{\beta_k}+l_{\gamma_k}),$$

$$l_{\alpha_1}=l_{\beta_1}=0;\quad k=1,2,3,4;\quad l_{\alpha_4}=l_{\beta_4}=0; \tag{24}$$

$$(\alpha_2)+(\beta_1)-\frac{\sin(\gamma_2+\beta_3+\gamma_4)}{\sin\gamma_4}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\gamma_3}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}(\alpha_4)-$$

$$-\frac{\sin(\gamma_2+\beta_3)}{\sin\gamma_4}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\beta_4}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\gamma_3}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}(\beta_4)+w_5=0; \tag{25}$$

$$w_5=-l_{\alpha_2};$$

$$(\beta_2)-(\beta_1)-\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2}(\alpha_1)-$$

$$-\frac{\sin(\gamma_1+\beta_2)}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2}(\beta_1)+\frac{\sin(\beta_3+\gamma_4)}{\sin\gamma_4}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\gamma_3}(\alpha_4)+$$

$$+\frac{\sin\beta_3}{\sin\gamma_4}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\beta_4}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\gamma_3}(\beta_4)+w_6=0; \qquad (26)$$

$$w_6=-l_{\beta_2};$$

$$(\gamma_3)+(\alpha_4)+\frac{\sin(\beta_2+\alpha_3)}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\gamma_3}{\sin\beta_3}(\alpha_1)+$$

$$+\frac{\sin(\gamma_1+\beta_2+\alpha_3)}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\gamma_3}{\sin\beta_3}(\beta_1)+w_7=0; \qquad (27)$$

$$w_7=-l_{\gamma_3};$$

$$(\beta_3)-(\alpha_4)+\frac{\sin(\beta_3+\gamma_4)}{\sin\gamma_4}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\gamma_3}(\alpha_4)-\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}\times$$

$$\times\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2}(\alpha_1)+\frac{\sin(\gamma_1+\beta_2)}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2}(\beta_1)-$$

$$-\frac{\sin\beta_3}{\sin\gamma_4}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\beta_4}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\gamma_3}(\beta_4)+w_8=0; \quad w_8=-l_{\beta_3}. \qquad (28)$$

Уравнения (25)—(28) — типовые. Они соответствуют полигонным условным уравнениям. Уравнения (24) отвечают условным уравнениям фигур.

В заключение отметим, что при уравнивании сетей, показанных на рис. 2 и 3, удобно применять двухгрупповой метод профессора Урмаева: условия фигур относить в первую группу, а остальные — во вторую. Для составления типовых условных уравнений следует применять механическое правило, легко получаемое из записей (19), (25)—(28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасименко М. Д. Уравнивание триангуляции по методу условий с использованием однотипных условных уравнений. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1973, вып. 3.
2. Дворянков С. М. Уравнивание сетей триангуляции коррелатным методом. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1974, вып. 4.

Работа поступила 12 января 1976 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.