УДК 528.232.24

М. И. РУСИН

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАСЕЧКИ НА ЭЛЛИПСОИДЕ ПО ЦЕНТРАЛЬНЫМ СЕЧЕНИЯМ

Рассмотрим решение линейной засечки при больших расстояниях на эллипсоиде, считая измеренными длины центральных сечений. Такая постановка задачи обоснована тем, что разность длин Δs центрального сечения и геодезической линии в большинстве случаев практики меньше

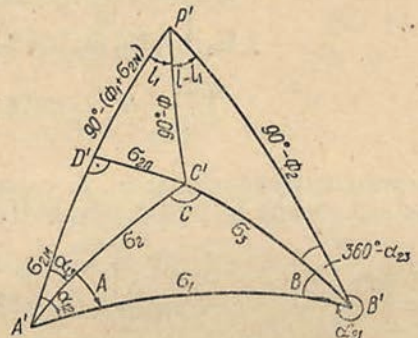


Рис. 1. Схема к решению линейной засечки на сфере.

погрешности измерений. Так, точность радиолокационных измерений 1:100 000—1:150 000 [1], а Δs при расстояниях $\sigma < 1$ не превышает 1 *м*. Поэтому измеренную линию можно считать либо геодезической, либо центральным сечением, по которому получим сравнительно простое решение линейной засечки.

Пусть с пунктов A и B, заданных геодезическими координатами B_1, L_1 и B_2, L_2, измерены длины центральных сечений s_2 и s_3 до пункта C, координаты B и L которого требуется определить. Наметим общий путь решения.

1. Переход от известных сфероидических элементов к сферическим.

2. Решение сферического треугольника $A'B'C'$ по трем известным сторонам и определение азимутов α_{13} и α_{23} (рис. 1).

3. Решение сферических треугольников $A'P'C'$ и $B'P'C'$ по двум сторонам и углу между ними, в результате получение дважды геодезических координат п. C.

Перейдем к рассмотрению отдельных этапов намеченного пути.

1. По формуле

$$\operatorname{tg}\Phi=(1-e^2)\operatorname{tg}B \tag{1}$$

переходим от геодезических широт B_1 и B_2 к геоцентрическим Φ_1 и Φ_2, после чего находим длину σ_1 и азимуты α_{12} и α_{21} геоцентрического изображения центрального сечения s_1 (рис. 1):

$$\cos\sigma_1=\sin\Phi_1\sin\Phi_2+\cos\Phi_1\cos\Phi_2\cos l, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha'_{21}+\alpha_{12})&=\frac{\cos\frac{1}{2}(\Phi_2+\Phi_1)}{\sin\frac{1}{2}(\Phi_2-\Phi_1)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}l\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha'_{21}-\alpha_{12})&=\frac{\sin\frac{1}{2}(\Phi_2+\Phi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\Phi_2-\Phi_1)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}l\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Для перехода от длин центральных сечений s_2 и s_3 к дугам их геоцентрических изображений σ_2 и σ_3 имеем выражение [2]

$$\sigma''=\sigma''_0+\mathrm{I}_0+\mathrm{II}_0+\mathrm{I}\left(\frac{dI}{d\sigma}\right)_0, \tag{4}$$

в котором

$$\sigma_0''=\frac{s}{a}\alpha_1, \tag{5}$$

$$\mathrm{I}_0=-\beta\sin\sigma_0\cos(2M+\sigma_0), \tag{6}$$

$$\mathrm{II}_0=\gamma\sin2\sigma_0\cos2(2M+\sigma_0), \tag{7}$$

$$\left(\frac{d\mathrm{I}}{d\sigma}\right)_0=\frac{\beta}{\rho''}\cos2(M+\sigma_0). \tag{8}$$

При этом коэффициенты α_1, β, γ выбираются из таблиц [2] по аргументу $\cos^2\alpha_0$, а углы M и α_0 определяются по формулам [2]:

$$\operatorname{tg}M=\sec\alpha_1'\operatorname{tg}\Phi_1, \tag{9}$$

$$\sin\alpha_0=\sin\alpha_1'\cos\Phi_1, \tag{10}$$

в которых Φ_1 есть широта исходного пункта (A или B), а α_1' — неизвестный азимут направления: пункт исходный — пункт определяемый. Поэтому поступаем так: а) Находим приближенно σ_2 и σ_3 по формуле

$$\sigma''=\sigma_0''=\frac{s}{a}\alpha_{1\,\text{ср}}, \tag{11}$$

где $\alpha_{1\text{ср}}$ $206438''\approx\rho''\left(1+\frac{e'}{8}\right)^2$; б) Решая треугольник $A'B'C'$, находим приближенные значения его углов A и B и азимутов α_{13} и α_{23}

$$\alpha_{13}=\alpha_{12}-A, \tag{12}$$

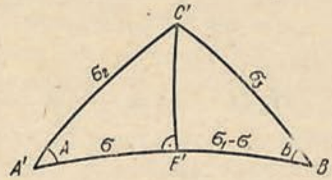
$$\alpha_{23}=\alpha_{21}+B; \tag{13}$$

в) Вычисляем α_0 и $\cos^2\alpha_0$, из таблиц выбираем коэффициенты α_1, β, γ и по (4) находим значения σ_2 и σ_3.

После этого повторяем вычисления пунктов б) и в) и находим σ_2 и σ_3 в следующем приближении.

Число приближений при вычислении дуг σ_2 и σ_3 зависит при заданной точности от длин линий. Так, для получения первого слагаемого формулы (4) с одинаковой точностью при различных длинах сторон s, требуется различная точность коэффициента α_1. При $s<0{,}1R$ и точности вычисления σ порядка $0{,}001''$ достаточно знать α_1 до $0{,}01''$, что соответствует ошибке азимута $1'$. Такую точность обеспечивает первое приближение. При $s \leqslant R$ значение σ с погрешностью порядка $0{,}001''$ получим

Рис. 2. Схема к решению сферического треугольника по формулам Модюи.



во втором приближении. При вычислении σ (и координат) с точностью $0{,}01''$ достаточно одного приближения при любых длинах сторон s.

2. Углы треугольника $A'B'C'$ находим: а) или по удобным для логарифмического вычисления формулам полупериметра.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \frac{m}{\sin(p-\sigma_3)} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \frac{m}{\sin(p-\sigma_2)} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \frac{m}{\sin(p-\sigma_1)} \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

где

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \tag{15}$$

$$m^2 = \frac{\sin(p-\sigma_1)\sin(p-\sigma_2)\sin(p-\sigma_3)}{\sin p}, \tag{16}$$

с контролем вычислений по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{m}{\sin p}; \tag{17}$$

б) или по правилу Непера-Модюи, примененному к двум треугольникам (рис. 2),

$$\cos A = \frac{\operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg}\sigma_2}, \tag{18}$$

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg}(\sigma_1 - \sigma)}{\operatorname{tg}\sigma_3} = \frac{\operatorname{tg}\sigma_1 - \operatorname{tg}\sigma_2}{\operatorname{tg}\sigma_3(1 + \operatorname{tg}\sigma_1 \operatorname{tg}\sigma)}, \tag{19}$$

с вычислением дуги σ (рис. 2) по предложенной А. В. Буткевичем формуле

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\cos\sigma_3 - \cos\sigma_1\cos\sigma_2}{\cos\sigma_2\sin\sigma_1}. \tag{20}$$

Формула (20) применима при больших расстояниях; формулы (18)—(20) в целом удобны для вычислений на малых счетных машинах.

Получив углы A и B, находим азимуты α_{13} и α_{23} (рис. 1) по формулам (12) и (13).

3. Решаем треугольники $A'C'P'$ и $B'C'P'$ по известным двум сторонам и углу между ними и находим

$$\sin\Phi = \cos\sigma_2 \sin\Phi_1 + \sin\sigma_2 \cos\Phi_1 \cos\alpha_{13} = \cos\sigma_3 \sin\Phi_2 + \\ + \sin\sigma_3 \cos\Phi_2 \cos\alpha_{23}, \tag{21}$$

$$\operatorname{ctg} l_1 = \frac{\operatorname{ctg}\sigma_2 \cos\Phi_1 - \cos\alpha_{13} \sin\Phi_1}{\sin\alpha_{13}}, \tag{22}$$

$$\operatorname{ctg}(l - l_1) = -\frac{\operatorname{ctg}\sigma_2 \cos\Phi_2 - \cos\alpha_{23} \sin\Phi_2}{\sin\alpha_{23}}, \tag{23}$$

а для контроля вычисляем

$$l = l_1 + (l - l_1).$$

Получим формулы для Φ, l_1 и $(l-l_1)$ в логарифмическом виде.

Из прямоугольного треугольника $A\,C'D'$ (рис. 1) находим катеты

$$\operatorname{tg}\sigma_{2м} = \cos\alpha_{13} \operatorname{tg}\sigma_2, \tag{24}$$

$$\operatorname{tg}\sigma_{2п} = \operatorname{tg}\alpha_{13} \sin\sigma_{2м}, \tag{25}$$

затем, решая треугольник $D'P'C'$, получаем

$$\operatorname{tg} l_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{13} \sin\sigma_{2м}}{\cos(\Phi_1 + \sigma_{2м})}, \tag{26}$$

$$\operatorname{tg}\Phi = \cos l_1 \operatorname{tg}(\Phi_1 + \sigma_{2м}). \tag{24}$$

При передаче координат по линии s_3 аналогично найдем:

$$\operatorname{tg}\sigma_{3м} = \cos\alpha_{23} \operatorname{tg}\sigma_3, \tag{28}$$

$$\operatorname{tg}\sigma_{3п} = -\operatorname{tg}\alpha_{23} \sin\sigma_{3м}, \tag{29}$$

$$\operatorname{tg}(l - l_1) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha_{23} \sin\sigma_{3м}}{\cos(\Phi_2 + \sigma_{3м})}, \tag{30}$$

$$\operatorname{tg}\Phi = (l - l_1) \operatorname{tg}(\Phi_2 + \sigma_{3м}). \tag{31}$$

4. Вычисляем геодезическую долготу п. C

$$L = L_1 + l_1 \tag{32}$$

и по формуле (1) переходим от Φ к B.

В заключение отметим, что предлагаемый метод (с использованием таблиц [2]) обеспечивает точность вычисления координат порядка 0,001″ при любых расстояниях. Он может найти применение при привязке отдельных пунктов к твердым сторонам, например к сторонам геодезического векторного хода [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Жонголович И. Д. Проект геодезического векторного хода Арктика—Антарктика. М., 1969.

2. Русин М. И. Решение геодезических задач на большие расстояния по центральному сечению. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 9.

Работа поступила в редколлегию 22 января 1974 года. Рекомендована кафедрой космической геодезии и астрономии Львовского политехнического института.