УДК 528.14

В. А. СКРЫЛЬ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧЕБЫШЕВСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРИ УРАВНОВЕШИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В настоящее время уравновешивание результатов геодезических измерений производится в основном по способу наименьших квадратов. Однако известно, что оценки, полученные по этому методу, в определенном смысле экстремальны при условиях, что каждая ошибка измерений является реализацией случайной величины с нулевым математическим ожиданием и ошибки измерений подчинены нормальному закону распределения. Поскольку в геодезических измерениях ситуация, когда создаются такие условия, бывает редко, то, как указывал еще Гаусс, «способ наименьших квадратов в данном случае теряет право на свой ранг закона, вытекающего из теории вероятностей, но рекомендует себя только тем, что упрощает связанные с ним вычисления» [2, с. 144]. Другими словами, в случае несоблюдения указанных выше условий способ наименьших квадратов имеет смысл лишь с точки зрения вычислительной простоты алгоритма. На основании последнего представляет интерес применение и иных принципов, отличных от принципа наименьших квадратов, а также несложных в вычислительном отношении.

Рассмотрим, например, принцип равномерного (чебышевского) приближения. Впервые этот принцип при решении системы N линейных несовместных уравнений с n неизвестными ($N>n$) применил в 1799 г. Лаплас [10] еще за несколько лет до разработки и введения способа наименьших квадратов (Лежандр, 1806 и Гаусс, 1809). Систему

$$v_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+l_i \quad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

Лаплас решал под условием минимизации наибольшей из абсолютных значений поправок

$$\max|v_i|=\max\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+l_i\right|=\min. \tag{2}$$

Он же подчеркнул, что именно принцип (2) позволяет строгим образом ставить и решать вопрос о том, вкладываются ли опытные данные в эмпирическую формулу того или иного типа или нет.

Дальнейшее развитие этого метода связано с именами Фурье, П. Л. Чебышева, Годсельса, Валле Пуссена и в современный период — Е. Я. Ремеза [4], С. И. Зуховицкого [3], Е. Штифеля [11] и др. В работах А. К. Успенского [7, 8] и Хр. Тимова [5, 6] предлагаются методы уравновешивания, основанные на принципе чебышевского минимакса.

Уравновешивание геодезических построений путем сведения его к решению задачи (1)—(2), безусловно, потребует определенных изменений в аппарате теории обработки геодезических измерений. Действительно, при этом устраняется один из важных этапов уравнивания по способу наименьших квадратов — составление и решение нормальных уравнений. Кроме того, по существу теряет свое методологическое значение коррелатный способ уравнивания (способ условных измерений), ибо он реализуется в той же вычислительной схеме, что и способ посредственных измерений.

Однако, прежде чем рассмотреть весь комплекс проблем уравнительных вычислений методом чебышевских приближений, имеет смысл выяснить возможную экономичность этого метода с точки зрения объема вычислений. Анализ известных в математике способов решения задачи (1)—(2) с точки зрения их применения для уравнивания геодезических измерений показал, что лучше всего пользоваться так называемым «эффективным методом повышающего действия» [4], связанным с применением аппарата линейного программирования.

Задача (1)—(2) методами линейного программирования решается по сравнительно простой, компактной и монотонной схеме вычислений после конечного числа циклов. Все вычислительные операции имеют несложную и наглядную геометрическую интерпретацию. В процессе вычислений обеспечивается надежный контроль промежуточных и окончательных результатов.

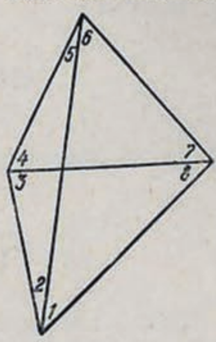
В работе [11] показано, что задача (1)—(2) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i = \Lambda - v_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - l_i + \Lambda = -\varphi_i - l_i + \Lambda \geqslant 0, \\ &\Lambda = \min \qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, 2N). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь Λ — дополнительная $(n+1)$-я переменная, а число функций v_i удвоено за счет присоединения их симметричных копий

$$v_{N+i} = -v_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - l_i.$$

Решение задачи (1)—(2), а значит и (3) состоит из двух стадий: подготовительной и основной, включающей в себя двойственный симплекс-процесс. Основу вычислительной схемы составляют модифицированные жордановы исключения [3, 11] (в дальнейшем слово «модифицированные» опускается).



Геодезический четырехугольник.

Задачу на уравновешивание будем решать поэтапно. На подготовительной стадии (I, II, III — этапы) сводим задачу (1)—(2) к двойственной задаче симплекс-метода согласно теореме, приведенной на стр. 478 в [4]. На этой стадии соответствующим образом выбираем $n+1$ линейных форм $\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, которые необходимо превратить в систему типа нормального неотрицательного решета. Для этого «выпрямляем» линейное соотношение

$$c_1 \varphi_{i_1} + c_2 \varphi_{i_2} + \cdots + c_{n+1} \varphi_{i_{n+1}} = 0 \qquad (4)$$

так, чтобы все множители $c_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ были неотрицательными и кроме того, выполнялось бы условие $\sum\limits_{\nu=1}^{n+1} c_\nu l_{i\nu} \geqslant 0$. Затем заменим $\varphi_{i\nu}$ на соответствующие им величины ξ_{i_ν} из (3). Принимая теперь эти $n+1$ величин ξ_{i_ν} за новые независимые переменные вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n \Lambda$, переходим к обычному виду задачи двойственного симплекс-процесса с неотрицательными переменными. Данный алгоритм представляет собой специализированную реализацию указанных выше положений в наиболее экономной форме.

Задачу (1)—(2) несомненно удобнее решать на ЭВМ, например, по программе на языке АЛГОЛ, приведенной в [1]. Однако при небольшом количестве уравнений поправок — порядка десяти, допустимы и ручные вычислительные средства.

Для иллюстрации алгоритма приведем пример уравновешивания геодезического четырехугольника методом чебышевских приближений. Исходные данные взяты из [9].

Измеренные углы:

1 — 43°13′58,3″;	4 — 51°31′32,0″;	7 — 47°56′13,1″;
2 — 34°00′52,4″;	5 — 24°04′59,6″;	8 — 32°22′35,4″.
3 — 70°22′31,0″;	6 — 56°27′12,4″;	

Если за необходимые неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4 принять поправки соответственно в 1-й, 2-й, 3-й и 6-й измеренные углы, то система уравнений поправок для данной фигуры (рисунок) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= x_1,\\
v_2 &= x_2,\\
v_3 &= x_3,\\
v_4 &= 0{,}87\,x_1 - 0{,}41\,x_2 + 0{,}19\,x_3 - 0{,}52\,x_4 + 3{,}09,\\
v_5 &= -0{,}87\,x_1 - 0{,}59\,x_2 - 1{,}19\,x_3 + 0{,}52\,x_4 + 2{,}21,\\
v_6 &= x_4,\\
v_7 &= x_2 + x_3 - x_4 - 1{,}90,\\
v_8 &= -x_1 - x_2 - x_3 + 3{,}30.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

I. В начальной табл. 1 в столбцах φ_i ($i=1, 2, \ldots, N$) расположены коэффициенты уравнений (5). Выполняем последовательно n шагов

Таблица 1

Таблица коэффициентов уравнений поправок

	$\varphi_1=$	$\varphi_2=$	$\varphi_3=$	$\varphi_4=$	$\varphi_5=$	$\varphi_6=$	$\varphi_7=$	$\varphi_8=$
x_1	1*	0	0	0,87	−0,87	0	0	−1
x_2	0	1*	0	−0,41	−0,59	0	0	−1
x_3	0	0	1*	0,19	−1,19	0	0	−1
	0	0	0	−0,52	0,52	1*	−1	0

жордановых исключений * неизвестных; в нашем случае $n=4$. Для про-

---

* Каждый шаг жорданова исключения для системы из N линейных уравнений с n неизвестными x_j ($j=1, 2, \ldots, n$)

$$y_i = -a_{i1}(-x_1) - a_{i2}(-x_2) - \ldots - a_{in}(-x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, N),$$

коэффициенты которых размещены в виде следующей таблицы:

	$-x_1$	$-x_2$	$\ldots$	$-x_s$	$\ldots$	$-x_n$
y_1	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$\ldots$	$-a_{1s}$	$\ldots$	$-a_{1n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_r	$-a_{r1}$	$-a_{r2}$	$\ldots$	$-a_{rs}$	$\ldots$	$-a_{rn}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_N	$-a_{N1}$	$-a_{N2}$	$\ldots$	$-a_{Ns}$	$\ldots$	$-a_{Nn}$

,

представляет собой операцию перемены ролями зависимой переменной y_r и независимой x_s. Он включает в себя: 1. Выбор ключевого элемента a_{rs}, отличного от нуля, и замену этого элемента обратным числом в новой (следующей) таблице. 2. Умножение найденного обратного числа на все элементы ключевой строки. 3. Умножение найденного обратного числа на все другие элементы ключевого столбца. Произведения записываются с обратным знаком. 4. Вычисление остальных элементов a'_{ij} ($i \neq r$, $j \neq s$) по формуле:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}\,a_{rj}}{a_{rs}}.$$

стоты вычислений за ключевые принимаем элементы (обозначенные звездочкой), равные единице, в столбцах которых все остальные коэффициенты равны нулю. Опуская промежуточные таблицы жордановых исключений, запишем сразу табл. 2, где вместо неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 введены новые независимые переменные φ_1, φ_2, φ_3, φ_6. Коэффициенты в табл. 2 не изменились сравнительно с табл. 1 ввиду использованного

Таблица 2

Преобразованная таблица коэффициентов уравнений поправок

	$\varphi_4=$	$\varphi_5=$	$\varphi_7=$	$\varphi_8=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$
$\varphi_1=$	0,87	−0,87	0	−1	1	0	0	0
$\varphi_2=$	−0,41	−0,59	1	−1	0	1	0	0
$\varphi_3=$	0,19	−1,19	1	−1	0	0	1	0
$\varphi_6=$	−0,52	0,52	−1	0	0	0	0	1
Ω	3,09	2,21	−1,90	3,30				

нами выбора ключевых элементов. Табл. 2 дополняем строкой Ω, элементы которой вычисляются по формуле

$$\Omega_{n+s}=l_{i_{n+s}}-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu s}l_{i_\nu}\ (\nu=1,2,\cdots,n;\ s=1,2,\cdots,N-n), \qquad (6)$$

где $\alpha_{\nu s}$ — коэффициенты в левой части табл. 2 в ее столбцах с заголовками φ_4, φ_5, φ_7, φ_8, а $l_{i\nu}$ — свободные члены, соответствующие строкам φ_1, φ_2, φ_3, φ_6. Практически же, поскольку свободные члены $l_{i\nu}$ равны нулю, в строке Ω записываем свободные члены $l_{i_{n+s}}$ то есть 4-го, 5-го, 7-го и 8-го уравнений поправок системы (5).

Таблица 3

Подготовительная таблица симплекс-процесса

	$\xi_4=$	$\xi_5=$	$\xi_7=$	$\xi_8=$	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$
ξ_1	0,87	−0,87	0	−1	−1	0	0	0
ξ_2	−0,41	−0,59	1	−1	0	−1	0	0
ξ_3	0,19	−1,19	1	−1	0	0	−1	0
ξ_6	−0,52	0,52	−1	0	0	0	0	−1
Λ	0,87	3,13	0	4*	1	1	1	1
1	−3,09	−2,21	1,90	−3.30	0	0	0	0

II. В табл. 2 определяем наибольшую по модулю величину Ω_{n+s}: *а*) если $\Omega_{n+s^*}>0$, то изменим знаки на противоположные у коэффициентов в тех строках, где $\alpha_{\nu s}>0$; *б*) если $\Omega_{n+s^*}<0$, то изменим на противоположные знаки у всех коэффициентов в отобранном столбце s^*, а также и у Ω_{n+s^*}. Затем снова выполняем процедуру *а*.

Обозначим измененные коэффициенты через α' и β' соответственно в левой и правой частях табл. 2. В нашем примере $\Omega_{n+s^*}=+3{,}30$, и поскольку в столбце φ_8 все элементы неположительные, то данное исследование не изменит табл. 2.

Для образования следующей табл. 3 заменим все N заголовков φ на $-\varphi$ и, кроме того, вместо величин $-\varphi$ подставим из (3) равные им

$(\xi-\Lambda+l)$. Практически после исследования Ω_{n+s^*} необходимо: а) при замене заголовков φ на $-\varphi$ заменить коэффициенты в правой части табл. 2 (первые n строк и последние n столбцов) на противоположные; б) ввести $(n+1)$-ую строку с заголовком Λ, элементы которой получают по формулам:

$$1-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha'_{\nu s}\;(s=1,2,\ldots,N-n) \text{ — для левой части таблицы и}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\beta'_{\nu s}\;(s=N-n+1,\;N-n+2,\ldots,N) \text{ — для правой части;}$$

в) ввести $(n+2)$-ую строку с заголовком 1. В левой части табл. 3 помещаем соответствующие элементы строки Ω табл. 2, изменив их значения на противоположные, в правой части — величины

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\beta'_{\nu s}l_{i,}\;(s=N-n+1,\;N-n+2,\ldots,N),$$

равные в нашем примере нулю.

Таблица 4

Начальная таблица симплекс-процесса

	$\xi_4=$	$\xi_5=$	$\xi_7=$	$\Lambda=$		$2\Lambda=$
ξ_1	1,088*	−0,088	0	0,25		0,50
ξ_2	−0,192	0,192	1	0,25		0,50
ξ_3	0,408	−0,408	1	0,25		0,50
ξ_6	−0,520	0,520	−1	0		0
ξ_8	0,218	0,782	0	0,25		0,50
1	−2,372	0,372	1,900	0,825		1,650

III. Выполняем один шаг жорданова исключения с ключевым элементом $1-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha'_{\nu s^*}$. Образованный столбец с заголовком Λ в табл. 4 поместим после столбцов с ξ-заголовками, а преобразованные x-столбцы зарегистрируем в виде отдельной табл. 5, которая в дальнейшем остается неизменной.

На этом заканчивается подготовительная стадия, и мы непосредственно приступаем к реализации процесса повышающего действия на основе двойственного симплекс-метода. Благодаря принятому выше специализированному исключению переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \Lambda$, в табл. 4 заведомо обеспечена неотрицательность всех элементов Λ-столбца, что позволяет избегнуть предварительной фазы двойственного симплекс-процесса. Кроме того, учитывая соотношение [4]

$$\xi_i+\xi_{i+N}=2\Lambda, \tag{7}$$

можно ограничиться $N-(n+1)$ числом ξ-столбцов с заголовками $\xi_{n+2}, \ldots, \xi_n$. Для более удобного использования соотношения (7) введен 2Λ-столбец (Λ-столбец можно опустить).

IV. Применяемый здесь двойственный симплекс-процесс заключается в проведении жордановых замен с ключевым элементом, который выбирают согласно следующему. Берут наименьший отрицательный из нижних элементов (строка с заголовком 1) $2N-n-1$ столбцов табл. 4 с учетом на основе (7) «теневых» неявно представленных столбцов. При этом к сравнению допускаются: а) алгебраически наименьший элемент и б) разность между результирующим элементом (пересечение столбца 2Λ и строки с заголовков 1) и максимальным положительным элементом упомянутой выше строки. Ключевой столбец находят по отрицательной максимальной по модулю величине из этих двух значений. В таком столбце за ключевой принимают тот положительный элемент, отношение к которому соответственного элемента из столбца Λ (или 2Λ) минимальное.

Таблица 5

Опорная таблица симплекс-процесса

	$x_1=$	$x_2=$	$x_3=$	$x_4=$
(2,18) ξ_1	−0,75	0.25	0,25	0,25
(0) ξ_2	0,25	−0,75	0,25	0,25
(0) ξ_3	0,25	0,25	−0,75	0,25
(0) ξ_6	0	0	0	−1
(0) ξ_8	0,25	0,25	0,25	0.25
1	0,825	0,825	0,825	0,825
	(−0,81)	(1,37)	(1,37)	(1,37)

В нашем примере в табл. 4 сравниваются величины —2,372 и 1,650—1,900=—0,350. За ключевой принят ξ_4-столбец. Сравнивая все отношения элементов 2Λ-столбца к соответствующим поолжительным элементом ξ_4-столбца, определяем ключевой элемент, равный 1,088.

После выполнения жорданова исключения с найденным таким образом ключевым элементом приходим к табл. 6, к которой снова применяем положения, использованные на этапе IV и т. д. Критерием окончания процесса является положительность обеих сравниваемых величин из пунктов а и б. Поскольку в табл. 6 обе сопоставляемые величины 0,18 и 2,74—2,18=0,56 положительны, то она является завершающей таблицей двойственного симплекс-процесса.

Таблица 6

Завершающая таблица симплекс-процесса

	$\xi_1=$	$\xi_5=$	$\xi_7=$		$2\Lambda=$
ξ_4	0,919	−0,081	0		0,46
ξ_2	0,176	0,176	1		0,59
ξ_3	−0.375	−0,375	1		0,31
ξ_6	0.478	0,478	−1		0,24
ξ_8	−0,200	0,800	0		0,40
1	2,180	0,180	1,900		2,740

Добавим еще, что слева от 2Λ-столбца оставляем пустой столбец, в который будем вписывать очередной ключевой столбец, если таковой не окажется в числе явно представленных и будет определен на основе соотношения (7) в очередной симплекс-таблице.

В завершающей табл. 6 значение результирующего элемента (столбец 2Λ, строка 1) равно удвоенной максимальной по модулю поправке v_i, а именно

$$\max|v| = \frac{1}{2} \cdot 2,74 = 1,37.$$

Значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 находим, подставляя величины ξ, извлеченные из завершающей табл. 6 в табл. 5. Для величин ξ, оказавшихся вверху табл. 6 берем значения в нижней строке, величины ξ, отсутствующие в завершающей таблице, вычисляем с помощью соотношения (7), величины ξ, оказавшиеся в левой части таблицы, равны нулю. Значения ξ даны в табл. 5 в скобках левее одноименных заголовков. Полученные значения неизвестных приведены внизу табл. 5 в скобках.

Искомые поправки определим теперь, подставив найденные значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 в начальную систему уравнений поправок (5) (табл. 7), чем и заканчивается решение задачи уравновешивания геодезического четырехугольника.

Таблица 7

Результаты уравнивания геодезического четырехугольника по способу $[vv]=\min$ и $\max|v|=\min$

№ поправок	$[vv]=\min$	$\max\|v\|=\min$
1	$-0{,}31''$	$-0{,}81''$
2	+1,79	+1,37
3	+1,02	+1,37
4	+1,88	+1,37
5	+0,61	+1,19
6	+0,79	+1,37
7	+0,13	−0,53
8	+0,79	+1,37
$[vv]$	9,51	11,74

Вычисления во всех таблицах легко контролируются суммированием по столбцам либо по строкам с соответствующим добавлением контрольных строки или столбца. Кроме того, для таблиц двойственного симплекс-метода выполняется следующий контроль: сумма всех элементов по столбцам, кроме нижней строки, равняется единице (в столбце 2Λ — двум). В табл. 5 сумма элементов по столбцам, кроме, нижней строки равняется нулю.

Для сравнения полученных результатов дополним табл. 7 результатами уравнивания по способу наименьших квадратов из [9].

Объем вычислений при уравнивании данного геодезического четырехугольника по методу чебышевских приближений примерно равен объему вычислений по способу наименьших квадратов. Безусловно этот вывод не общий. Возможно, что в некоторых случаях вычисления по методу чебышевских приближений будут громоздкими из-за большего числа итераций. Однако более важна принципиальная сторона вопроса. Приведенный пример на уравнивание методом чебышевских приближений показывает, что максимальные из вводимых в результаты наблюдений поправки оказываются значительно менее таковых, полученных по способу наименьших квадратов (1,37″ вместо 1,88″). Таким образом, в некоторых случаях рассматриваемый метод уравнивания может оказаться более приемлемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александренко В. Л. Программа в языке АЛГОЛ-60 нахождения решения несовместной системы линейных уравнений общего вида с применением модифицированного симплекс-метода без явного удвоения числа уравнения. — В сб.: Алгоритмические языки и автоматизация программирования, вып. 2. Киев, 1966.

2. Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. Т. 1. М., Геодезиздат, 1957.

3. З у х о в и ц к и й С. И., А в д е е в а Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1964.
4. Р е м е з Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев, «Наукова думка», 1969, с. 478.
5. Т и м о в Хр. Чебишевско решение на несъвместни линейни системи от условни уравнения с неизвестни. — «Известия на Главнато управление по геодезия и картография», 1969, № 1.
6. Т и м о в Хр. Чебышевско изравняване на резултати от преки измервания на една и съща величина. — «Известия на Главнато управление по геодезия и картография», 1969, № 2.
7. У с п е н с к и й А. К. Решение уравнений погрешностей по способу наименьшего предельного уклонения. — «Сб. статей по геодезии, ГУГК», 1953, вып. 4.
8. У с п е н с к и й А. К. Решение условных уравнений по способу наименьшего предельного уклонения. — «Сб. статей по геодезии, ГУГК», 1953, вып. 5.
9. Ч е б о т а р е в А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М., Геодезиздат, 1958.
10. L a p l a c e P. S. Traite de mecanique celeste, 1799, t. II, Livre 3, № 39.
11. S t i e f e l E. Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation. — «Numeriche Mathematik», 1960, 2.