РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1974 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 20

УДК 528.35

Я. М. КОСТЕЦКАЯ

О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИРЕКЦИОННЫХ УГЛОВ В СПЛОШНЫХ СЕТЯХ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Точность дирекционных углов в сетях трилатерации неоднократно освещалась в литературе. И. А. Кутузов [2] получил формулы для определения ошибок дирекционных углов конечных сторон рядов трилатерации, построенных из геодезических четырехугольников, из смежных центральных систем и из сопряженных центральных систем. А. В. Заводовский [1] анализировал точность дирекционных углов связующих сторон сдвоенного ряда трилатерации. Он получил формулы для определения ошибок дирекционных углов связующих сторон сдвоенного ряда. Эти формулы после введения поправочных членов были рекомен-

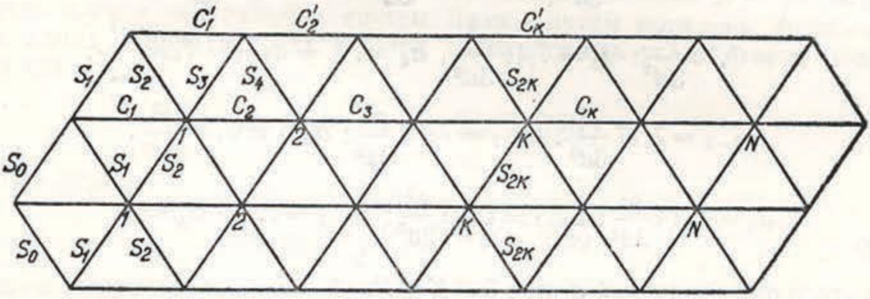

Схема строенного ряда трилатерации.

дованы как приближенные для оценки точности дирекционных углов сторон сплошных сетей трилатерации. Цель наших исследований — более детальное изучение закономерностей накопления ошибок дирекционных углов в сплошных сетях трилатерации.

В качестве первого приближения к сплошной сети трилатерации нами принята сеть, построенная из трех рядов равносторонних треугольников, и оценены дирекционные углы сторон s_j, для которых j — четное и равное $2K$, где K — номер точки диагонали ряда (см. рисунок). Средние квадратические ошибки определяли по весам, для получения которых использовали известную формулу

$$\frac{1}{P} = [ff] - \sum_{i=1}^{n} A_i, \tag{1}$$

где $[ff]$ — сумма квадратов коэффициентов весовой функции; A_i — величина, вносимая в обратный вес i-м условным уравнением; n — число условных уравнений, возникающих в сети. Для строенного ряда

$$n = 2N,$$

где N — число центральных систем в одном сдвоенном ряде сети.

Составим весовую функцию для дирекционного угла стороны s_{2K} верхнего ряда треугольников сети. После замены поправок в углы поправками в стороны она будет иметь вид:

$$F_{\alpha}=\frac{\rho}{\sqrt{3}\,d}[(s_0)-2(c_1)-2(c_2)-\ldots-2(c_k)+2(c_1')+2(c_2')+\ldots+$$
$$+2(c_{k-1}')+(s_{2k})],$$

где d — длина стороны треугольника; (s_i), (c_i), (c'_i) — поправки в стороны s_i, c_i и c'_i. (см. рисунок).
Для этой функции

$$[ff]=\frac{\rho^2}{3d^2}(8K-2). \tag{2}$$

Закон образования величин A_i сложный, но если просуммировать по две величины A, вносимые в обратные веса условными уравнениями центральных систем верхнего и нижнего ряда с одинаковыми номерами центральных точек, то получим N величин a, для которого легко найти сумму. Так, для стороны s_{2K} величины a_i имеют с точностью до 0,01 такие значения:

$$a_1=4{,}16\frac{\rho^2}{3d^2};\ a_2=6{,}80\frac{\rho^2}{3d^2};\ a_3=7{,}01\frac{\rho^2}{3d^2};$$
$$a_4=7{,}15\frac{\rho^2}{3d^2};\ a_5=7{,}19\frac{\rho^2}{3d^2},\ a_6=\ldots=a_{k-4}=7{,}20\frac{\rho^2}{3d^2};$$
$$a_{k-3}=7{,}17\frac{\rho^2}{3d^2};\ a_{k-2}=7{,}10\frac{\rho^2}{3d^2};\ a_{k-1}=8{,}38\frac{\rho^2}{3d^2}.$$
$$a_k=1{,}14\frac{\rho^2}{3d^2};\ a_{k+1}=0{,}09\frac{\rho^2}{3d^2};\ a_{k+2}=\ldots=a_N=0.$$

Для этого ряда значений a_i при $5\leqslant K\leqslant N-3$

$$\sum_{i=1}^{N}a_i=(7{,}20\,K-8{,}61)\frac{\rho^2}{3d^2}.$$

Используя полученное значение суммы величин a_i и (2), записываем

$$\frac{1}{P}=\frac{\rho^2}{d^2}(0{,}267\,K+2{,}20),$$

а средняя квадратическая ошибка дирекционного угла сторон верхнего ряда треугольников

$$m_3'=\pm\frac{\mu\rho}{d}\sqrt{0{,}267\,K+2{,}20}. \tag{3}$$

Для сторон среднего ряда треугольников

$$[ff]=\frac{\rho^2}{3d^2}(8K+2),$$

и

$$\sum_{i=1}^{N}a_i=\frac{\rho^2}{3d^2}(7{,}200\,K+5{,}34).$$

Подставив в (1) эти значения, получаем формулу для определения средней квадратической ошибки дирекционного угла стороны среднего ряда

$$m_3^{''} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}267\,K + 2{,}45}. \quad (4)$$

Таким же путем получили формулу для определения средней квадратической ошибки дирекционного угла сторон нижнего ряда

$$m_3^{'''} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}267\,K + 2{,}63}. \quad (5)$$

Эти формулы различаются только свободными членами, что можно объяснить некоторой несимметричностью сети. С хорошей точностью для определения средних квадратических ошибок сторон строенного ряда можно использовать формулу

$$m_3 = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}267\,K + 2{,}35}. \quad (6)$$

Дальше анализировали точность дирекционных углов в сети, состоящей из пяти рядов треугольников. Оценивали дирекционные углы сторон первого сверху и первого снизу ряда треугольников и ряда, расположенного в середине сети. Для них находили значения [ff] и суммы величин a_i, которые получали как сумму четырех величин A — по одной с каждого ряда центральных систем. Таким путем выведены формулы для средних квадратических ошибок дирекционных углов сторон верхнего ряда

$$m_5^{'} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}076\,K + 2{,}81}, \quad (7)$$

среднего ряда

$$m_5^{'''} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}076\,K + 2{,}69} \quad (8)$$

и нижнего ряда

$$m_5^{\mathrm{V}} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}076\,K + 3{,}07}. \quad (9)$$

Полученные формулы тоже отличаются только свободными членами. С хорошим приближением для оценки дирекционных углов пятикратных рядов трилатерации можно использовать формулу

$$m_5 = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}076\,K + 2{,}80}. \quad (10)$$

По такой же методике проводили исследование точности дирекционных углов сторон сети трилатерации, построенной из семи рядов треугольников. Оценивали дирекционные углы сторон первого, третьего, пятого и седьмого рядов сети. Для средних квадратических ошибок дирекционных углов сторон каждого из этих рядов получены соответственно такие формулы:

$$m_7^{'} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}031\,K + 3{,}02}; \quad (11)$$

$$m_7^{'''} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}031\,K + 2{,}90}; \quad (12)$$

$$m_7^{\mathrm{V}} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}031\,K + 2{,}79}; \quad (13)$$

$$m_7^{\mathrm{VII}} = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}031\,K + 3{,}22}. \qquad (14)$$

С хорошим приближением можно считать, что средняя квадратическая ошибка дирекционного угла стороны семикратного ряда

$$m_7 = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{0{,}031\,K + 3{,}00}. \qquad (15)$$

Полученные формулы проверяли сравнением средних квадратических ошибок дирекционных углов, вычисленных по этим формулам, с ошибками, вычисленными по обратным весам, полученным при уравнивании сетей по методу условных измерений. Проверку выполняли на сетях, в каждом сдвоенном ряде которых имеется 25 центральных систем, то есть для $N=25$. Выполняли оценку дирекционных углов сторон s с номерами 2, 8, 16, 26, 36, 44, 50 и 52. Для проверки формул (3), (4), (5) и (6) решали систему 50 условных уравнений и 24 весовых функций. Для проверки формул (7), (8), (9) и (10) решали систему 100 условных уравнений и 24 весовых функции, для проверки формул (11), (12), (13), (14) и (15) решали систему 150 условных уравнений и 32 весовых функции. Эти вычисления были выполнены на ЭЦВМ «Минск-22». По обратным весам, полученным из уравнения, были определены точные значения средних квадратических ошибок дирекционных углов. При вычислении ошибок принимали, что стороны в сети трилатерации определяли с относительной ошибкой 1 : 200 000. Результаты этих вычислений приведены в таблице. Там же даны значения ошибок, вычисленные по соответствующим формулам.

Результаты проверки показывают, что формулы (3)—(5), (7)—(9) и (11)—(14) дают точные значения ошибок для сторон с номерами больше 8 и меньше $2N-6$, то есть они дают точные значения для сторон, удаленных от края сети не менее чем на 2—3 треугольника.

Приближенные формулы (6), (10) и (15) дают значения ошибок дирекционных углов для сторон, расположенных в середине сети с погрешностями не больше 7%.

Изменения в ошибках дирекционных углов при увеличении числа рядов в сети с пяти до семи не превышают в среднем 7%. Поэтому формулы, полученные для сети, состоящей из семи рядов, можно рекомендовать для оценки точности сплошных сетей трилатерации. Погрешность формулы (15) при использовании ее для сплошных сетей не будет превышать 10%.

Проведенные исследования показывают, что ошибки в дирекционных углах сетей трилатерации накапливаются по мере удаления от края сети довольно медленно. При этом скорость накопления значительно замедляется при увеличении количества рядов в сети. Так, в сети, состоящей из семи рядов, ошибка дирекционного угла второй от края связующей стороны равна 1″,4, а пятидесятой стороны — только 1,″9. Поэтому можно утверждать, что в сплошных сетях трилатерации ошибка дирекционных углов не зависит от положения стороны в сети. Величина ошибки зависит только от точности измерения сторон. Анализируя формулы ошибок дирекционных углов сторон трехкратного, пятикратного и семикратного рядов трилатерации, можно утверждать, что эта ошибка для сплошных сетей будет характеризоваться формулой

$$m_\alpha = \pm \frac{\mu\rho}{d} \sqrt{3} = \pm 1{,}7 \frac{\mu\rho}{d}.$$

В связи с тем, что в сплошных сетях трилатерации дирекционные углы связующих сторон практически равноточны, можно сделать заключение, что в них и связующие углы будут также равноточными.

Результаты проверки формул средних квадратических ошибок дирекционных углов сторон сети трилатерации

$$\left(\frac{\mu}{d}=1:200\,000\right)$$

s_j	s_2	s_8	s_{16}	s_{25}	s_{33}	s_{41}	s_{50}	s_{52}
Сеть, состоящая из трех рядов								
а) верхний ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,24	1″,81	2″,08	2″,38	2″,65	2″,84	2″,99	3″,12
По формуле (3)	2″,20	1″,81	2″,08	2″,38	2″,65	2″,84	2″,98	3″,02
б) средний ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,44	1″,87	2″,14	2″,43	2″,69	2″,88	3″,02	3″,25
По формуле (4)	1″,65	1″,88	2″,14	2″,43	2″,69	2″,88	3″,02	3″,06
в) нижний ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,49	1″,92	2″,18	2″,47	2″,72	2″,91	3″,07	3″,42
По формуле (5)	1″,70	1″,92	2″,18	2″,47	2″,73	2″,92	3″,05	3″,09
По формуле (6)	1″,62	1″,85	2″,12	2″,41	2″,68	2″,87	3″,00	3″,05
Сеть, состоящая из пяти рядов								
а) верхний ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,36	1″,76	1″,85	1″,95	2″,04	2″,12	2″,20	2″,36
По формуле (7)	1″,70	1″,76	1″,85	1″,95	2″,04	2″,12	2″,17	2″,19
б) ряд, расположенный в середине сети								
Точное значение ошибки	1″,45	1″,74	1″,82	1″,92	2″,02	2″,09	2″,16	2″,35
По формуле (8)	1″,66	1″,73	1″,82	1″,92	2″,02	2″,09	2″,14	2″,16
в) нижний ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,49	1″,83	1″,92	2″,01	2″,11	2″,18	2″,29	2″,75
По формуле (9)	1″,77	1″,84	1″,92	2″,01	2″,11	2″,18	2″,23	2″,25
По формуле (10)	1″,70	1″,76	1″,85	1″,95	2″,04	2″,12	2″,17	2″,18
Сеть, состоящая из семи рядов								
а) первый сверху ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,36	1″,75	1″,81	1″,85	1″,89	1″,93	2″,00	2″,16
По формуле (11)	1″,75	1″,77	1″,81	1″,85	1″,89	1″,93	1″,95	1″,96
б) третий сверху ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,44	1″,73	1″,77	1″,82	1″,86	1″,89	1″,94	2″,13
По формуле (12)	1″,71	1″,74	1″,77	1″,82	1″,86	1″,89	1″,92	1″,92

Продолжение таблицы

s_j	s_2	s_8	s_{16}	s_{26}	s_{36}	s_{44}	s_{50}	s_{52}
в) пятый сверху ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,44	1″,70	1″,74	1″,79	1″,83	1″,87	1″,92	2″,16
По формуле (13)	1″,68	1″,71	1″,74	1″,79	1″,83	1″,86	1″,89	1″,90
г) нижний ряд треугольников								
Точное значение ошибки	1″,49	1″,82	1″,86	1″,90	1″,94	1″,98	2″,09	2″,16
По формуле (14)	1″,80	1″,83	1″,86	1″,90	1″,94	1″,98	2″,00	2″,01
По формуле (15)	1″,74	1″,77	1″,80	1″,84	1″,89	1″,92	1″,94	1″,95

ЛИТЕРАТУРА

1. Заводовский А. В. Оценка точности линейных триангуляций.— «Научные записки Львовского политехнического ин-та, серия геодезия», 1959, № 5.

2. Кутузов И. А. Накопление погрешностей в рядах с измеренными сторонами. — «Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка», 1957, вып. 2.

3. Проворов К. Л. Точность элементов сети линейной триангуляции. — «Тр. НИИГАиК», т. II, 1958.

Работа поступила в редколлегию 15 мая 1973 г. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.