Информативная плотность имеет вид

$$Q=R_0/R_m. \tag{4}$$

При $Q>1$ считается, что функция генеративная.

В результате изучения проектов реконструкции рисовых оросительных систем выявлены участки и предметы местности, которые нужно отобразить на плане, и их среднее число на 1 га (таблица).

На основании данных таблицы и формулы (3) вычислена избыточность информации для различных масштабов:

Масштаб	Информативная емкость G	Избыточность Q, %
1:500	0,08	92
1:1000	0,13	87
1:2000	0,39	61
1:5000	0,71	29
1:10 000	Генеративная	—

Участки, предметы местности, точки, которые нужно отобразить на плане

Участки и объекты	Среднее число на 1 га
Отображаемые в масштабе	
Элементы оросительной сети	1
Элементы водоотводящей сети	1
Контуры срезок и выемок	2
Дороги	0,5
Отображаемые внемасштабными условными знаками	
Гидротехнические сооружения	1
Высоты точек	9

Приведенные данные и расчеты, выполненные по (1) и (2), показывают, что для разработки проекта реконструкции рисовой оросительной системы нужно использовать планы в масштабе 1 : 5000.

Следует заметить, что в производстве наиболее распространенный масштаб плана для проектирования реконструкции рисовой системы — 1 : 2000. Выполненные нами расчеты показывают, что применение такого масштаба неоправданно. Заметим также, что затраты на проведение съемочных работ для составления плана в масштабе 1 : 2000 примерно в 2 раза больше, чем для плана в масштабе 1 : 5000 [1].

Список литературы: 1. Единые нормы времени и расценок на изыскательские работы. Инженерно-геодезические изыскания. — М.: Стройиздат, 1983. 2. *Куропатенко Ф. К.* О точности определения площадей при землеустройстве. — Экономика сельского хозяйства, 1970, № 1. 3. *Макушин А. В.* Оптимальная площадь рисового чека. — В кн.: Совершенствование технологии топографических съемок для мелиорации и землеустройства. М., 1982. 4. *Маслов А. В.* Геодезические работы при землеустройстве. — М.: Недра, 1976. 5. *Неумывакин Ю. К.* Обоснование точности топографических съемок для проектирования. — М.: Недра, 1976.

Статья поступила в редколлегию 12. 11. 83

УДК 528.21/22

А. Н. МАРЧЕНКО

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА РЯДОМ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА *

Развивая предыдущие исследования [3—8], рассмотрим основанный на применении вариационного метода регуляризации А. Н. Тихонова [10—12] алгоритм определения значений и координат точечных масс для устойчивой аппроксимации гравитационного потенциала V Земли суммой потенциалов точечных масс.

1. Допустим, что исходными данными служат отягощенные погрешностями результаты измерений, трактуемые далее как линейные функционалы $l_j=l_j(T)$ от возмущающего потенциала T [10]. Ими могут быть значения аномалий силы тяжести, высоты геоида, результаты наблюдений топоцентрических дальностей до ИСЗ и др. Необходимо на основании геодезических измерений найти разложение функции

$$T\approx T_N=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{r_i} \tag{1}$$

по системе $1/r_i$ фундаментальных решений уравнения Лапласа (r_i — расстояние от i-й массы до текущей точки), что в совокупности с представлением нормального потенциала [6] в виде потенциала пяти точечных масс позволит получить математически однородную модель точечных масс для гравитационного потенциала Земли V.

В соответствии с [1, 9] проблему аппроксимации системой точечных масс [1, 4, 6—8] можно рассматривать как обратную потенциалографическую задачу в дискретной постановке, поскольку потенциал T трактуется суммой потенциалов точечных масс, расположенных на искомой поверхности $\sigma_A : \rho_i=f(\vartheta_i, \lambda_i)$.

Воспользуемся стандартным приемом решения некорректных задач и будем строить последовательность потенциалов $\{T_N\}$ под условием минимума сглаживающего функционала А. Н. Тихонова вида

$$\|\tilde{n}\|^2_{E_n}+\alpha\|T_N\|^2_q=\min, \tag{2}$$

в котором

$$\|\tilde{n}\|^2_{E_n}=\tilde{n}^T C^{-1}_{nn}\tilde{n},\quad \tilde{n}=L-WM,\quad L=[l_j]_{n,1},$$

$$M=[m_i]_{N,1},\quad W=[\omega_{ji}]_{n,N}\quad \omega_{ji}=\tilde{W}\left(\frac{1}{r_i(j)}\right), \tag{3}$$

* В основу работы положен доклад автора «Решение потенциалографической задачи в дискретной постановке» на международной школе по планетарной геодинамике (Киев, 1983 г., 29 сентября—9 октября).

а параметр регуляризации α можно найти одним из методов, рекомендуемым в [10, 12], для чего необходимо априорное задание, например, дисперсии d результатов наблюдений.

В (2)—(3) $\bar{n}$ — вектор ошибок измерений, характеризуемых заданной ковариационной матрицей C_{nn}, которая определяет [10] метрику в n-мерном евклидовом пространстве E_n; L — вектор результатов наблюдений (линейных функционалов); ω_{ji} — значения функций ω_i в точке j, получаемые как результат действия линейного оператора $\mathbb{W}$ на базисную функцию $1/r_i$, причем

$$l_j = \mathbb{W}(T_N(j)), \tag{4}$$

т. е. вид оператора $\mathbb{W}$ связан с типом функционалов l_j^*, $\|T_N\|_q^2$ — квадрат нормы возмущающего потенциала на гильбертовом пространстве H_2^q с воспроизводящим ядром [5, 10], который выбираем здесь в качестве стабилизатора задачи и можем представить следующим образом [8]:

$$\| T_N \|_q^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_i m_j F_{ij}^q = M^T F M. \tag{5}$$

Здесь $F = [F_{ij}^q]_{N,N}$ — матрица, состоящая из элементов F_{ij}^q, представляющих скалярное произведение $\left(\frac{1}{r_i}, \frac{1}{r_j}\right)_{H_2^q}$. Замкнутые выражения для F_{ij}^q при различных q получены в [8].

Отметим, что при построении регулярной минимизирующей последовательности $\{T_N\}$ из решения (2) находим такую оценку $\hat{T} \in H_2^q$ для потенциала $T \approx \hat{T}$, которая обладает наименьшей нормой в H_2^q, и в этом смысле решение наиболее гладкое до «порядка регуляризации q» [10]. Таким образом, возникает задача выбора воспроизводящего ядра, определяющего метрику пространства H_2^q.

2. Решение удобно искать [10, 14] на таком гильбертовом пространстве H_2^q, асимптотика воспроизводящего ядра которого близка к спектру степенных дисперсий возмущающего потенциала [15]. Такое ядро считают оптимальным в том смысле, что выбор последнего обеспечивает в дальнейшем минимум средней квадратической ошибки аппроксимации. Отмеченная близость, в частности, характерна для ядра Чернинга—Раппа ($q=2{,}5$) [15]. Однако последнее найдено с использованием «точечных» значений аномалий силы тяжести, что соответствует детальному гравитационному полю Земли, и его использование в (2), (5) обосновано лишь при построении детальных моделей точечных масс геопотенциала.

Если же необходимо описание глобального гравитационного поля, под которым понимаем такую его аппроксимацию, которая с необходимой точностью описывает движение геодезических спутников, то можно считать, что в этом случае изучению подлежит более сглаженное поле, которому будут соответствовать меньшая

* Здесь и далее полагаем, что выполнена линеаризация (см., например, [10, 6]) геодезических наблюдений, так как в общем случае последние можно трактовать как нелинейные функционалы от V.

дисперсия поля на поверхности Земли и, возможно, несколько иной закон убывания степенных дисперсий. Поэтому имеет смысл построение модельной ковариационной функции такого сглаженного поля с учетом ее целевого назначения. Это особенно полезно для практической реализации алгоритма (2), так как обеспечивает возможность получения замкнутых выражений для F_{ij}^q, что затруднительно при использовании оператора сглаживания в известных модельных ковариационных функциях точечного поля.

Чтобы преодолеть указанные трудности, в [5] на основании сглаженных по стандартным трапециям $5 \times 5°$ аномалий силы тяжести и гармоник модели GEM-9, построено шестипараметрическое ядро ЧНВ-2, подходящее именно для целей определения глобального гравитационного поля из комбинации спутниковых и наземных наблюдений. При этом учтена центральная симметрия области определения функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара (которые используются для аппроксимации возмущающего потенциала T), что позволило получить наилучшее согласие модельных (по ЧНВ-2) и эмпирических степенных дисперсий, в частности, за счет введения двух «сфер Бьерхаммара».

Таким образом, при аппроксимации глобального поля имеет смысл пользоваться стабилизатором (5) с параметрами ядра ЧНВ-2 [5], а при локальном его уточнении — ядром Чернинга—Раппа [15].

3. В общем случае параметры точечных масс определяем из минимизации (2), решая систему нелинейных уравнений с дополнительным выбором параметра регуляризации. Выделяются две основные группы способов, основанные на итеративной регуляризации как традиционных методов спуска по возможным направлениям, так и методов штрафных функций. Для построения удобного алгоритма минимизации (2) желательно выбрать один из способов с высокой скоростью сходимости, например метод Ньютона. Тем более, что итеративная регуляризация способа Ньютона для выпуклых задач при обычных ограничениях гарантирует сходимость метода при любом выборе начального приближения [2]. Поэтому воспользуемся обобщенным модифицированным методом Гаусса—Ньютона, который приводит к устойчивому итерационному процессу

$$X_{k+1} = X_k - [G^T(X_k)\, G(X_k) + \beta_k B]^{-1}\, G^T(X_k)\, (\mathbb{W}(X_k) - L) \tag{6}$$

для поиска точки минимума (2) [2, 11], где X_k — некоторое k-е приближение ($4N$-мерный вектор) уточняемых параметров (m_i, d_i, ϑ_i, λ_i); G — матрица ($n \times 4N$) производных, вычисленных в точках j от функций ω_{ij} по параметрам (m_i, d_i, ϑ_i, λ_i); $\beta_k > 0$ — параметр, подобный [11] параметру регуляризации; B — линейный самосопряженный положительно-определенный оператор, который на практике аппроксимируется некоторой конечномерной матрицей $\bar{B}$.

Анализируя возможности применения алгоритма (6) для поиска минимума в больших задачах, становится ясным, что при n и N

порядка 100 из-за длительности вычислений решение задачи (за счет многократного обращения матриц большой размерности) может быть чересчур сложно. Очевидно, что необходима модификация процесса (6). Кроме того, в (6) не учитывается некоторая дополнительная априорная информация об искомом решении, которую для повышения устойчивости желательно использовать, формализуя ее, например, в виде линейных ограничений.

4. Применительно к конкретной задаче известны следующие «естественные» условия, связывающие коэффициенты m_i разложения (1): сумма значений точечных масс должна равняться нулю, а центр масс получаемой многоточечной модели целесообразно совместить с центром масс Земли. Кроме того, при моделировании имеет смысл учитывать и те гармоники потенциала (например, резонансные), которые надежно определены методами спутниковой геодезии. Поэтому полагаем, что в общем случае известно r условных уравнений

$$SM=P, \tag{7}$$

в которых элементы матрицы S размерностью $(r\times N)$ связаны [6, 7] с координатами d_i, ϑ_i, λ_i точечных масс, а элементы вектора P — те нормированные коэффициенты $\bar{C}_{nm}$, $\bar{S}_{nm}$ геопотенциала, с которыми согласовываем m_i. Кроме того, в соответствии с [8], можно установить следующее неравенство для расстояний d_i от начала координат до точечных масс

$$R^*\leqslant d_i<R_{\text{В}}, \tag{8}$$

где $R_{\text{В}}$ — радиус сферы Бьерхаммара; R^* — радиус сферы, вычисляемой для равноотстоящих N точечных масс на основании замкнутого выражения для скалярного произведения $\left(\frac{1}{r_i}, \frac{1}{r_j}\right)_{H_2^q}$, которое можно интерпретировать ковариационной функцией потенциалов единичных точечных масс $(m_i=m_j=1)$, зависящей от сферического расстояния между ними и глубины их расположения. Здесь существенным является то, что значение $R_{\text{В}}$ в (8) зависит от гладкости аппроксимируемого поля [5], а R^* связано с условиями гладкости, накладываемыми на решение [7, 8], и ($R_{\text{В}}$ и R^*) могут необходимым образом варьироваться в зависимости от детализации аппроксимируемого поля, т. е. исходной наблюдательной информации.

Наконец, следует отметить, что дающий на практике пока наилучшие результаты подход фиксации плановых координат (ϑ_i, λ_i) точечных масс под экстремумами Δg также основан на дополнительном изучении качественной картины исследуемого поля. При этом в основу положены «подобие» в отдельных регионах аппроксимируемой и аппроксимирующей функций и строгие математические соотношения, устанавливающие известный факт: поле силы тяжести отдельной точечной массы в ее «эпицентре» тем меньше, чем глубже она расположена; кроме того, по мере роста глубины поле силы тяжести все более приближается к однородному. Последнее накладывает определенные условия на d_i и значения m_i точечных масс, так как в целом для нас особенно ценно их локальное действие вследствие достаточно сложной структуры гравитационного поля Земли.

5. Таким образом, если воспользоваться введенными линейными ограничениями (7), (8), то задачу минимизации (2) можно рассматривать как задачу нелинейного программирования, для решения которой используется метод регуляризации со стабилизатором (5). Вместо алгоритма (6) более эффективно (с точки зрения экономии памяти ЭВМ для хранения матриц G и W) построить итерационный процесс типа Гаусса—Зейделя для раздельного последовательного уточнения параметров (m_i, d_i, ϑ_i, λ_i) с регуляризацией (6) на каждом шаге. В нашем случае уточнение масс m_i с условиями (7) приводит [6, 7] к решению системы линейных уравнений и определению величин из следующего соотношения:

$$M=Q\,[W^TC_{nn}^{-1}G-S^T(SQS^T)^{-1}(SQW^TC_{nn}^{-1}L-P)],$$
$$Q=(W^TC_{nn}^{-1}W+\alpha F)^{-1},\ \alpha=\beta_k. \tag{9}$$

Уточнение ϑ_i и λ_i не связано с ограничениями, и лишь уточнению расстояний d_i сопутствует система ограничений (8) в виде линейных неравенств. Алгоритмически выгоднее учитывать эти две группы ограничений раздельно. Теперь мы можем сформулировать с учетом сделанных замечаний алгоритм построения модели точечных масс с регуляризацией по [12].

Задавшись некоторым числом N точечных масс, которыми мы хотим аппроксимировать геопотенциал T по дискретной наблюдательной информации, зафиксируем их координаты ϑ_i, λ_i в соответствии с особенностями аномального поля и с учетом ошибок данных, а расстояния $d_i=R_0$ получим с помощью алгоритма [8] для неравноотстоящих точечных масс, лежащих на сфере радиуса $R_0>R^*$. Значение R^* находим для N равноотстоящих масс и всегда $R^*<R_0$.

Имея координаты N масс, вычисляем m_i в соответствии с алгоритмом (9), обеспечивающим минимум (2) при ограничениях (7) в линейной постановке. Уточнение d_i, ϑ_i, λ_i выполняем далее раздельно в три шага на каждой итерации с помощью (6). В (6) в качестве вектора X последовательно подразумеваются наборы из N уточняемых параметров d_i, ϑ_i, λ_i. Матрица G имеет теперь на каждом шаге размерность $(n\times N)$ и состоит соответственно из производных от ω_{ij} по d_i или ϑ_i, или λ_i. В качестве матрицы $\bar{B}$, аппроксимирующей оператор B, целесообразно принять матрицу размерностью $(N\times N)$, состоящую из элементов $(m_im_jF_{ij}^q)$ при $\beta_k=1$.

Кроме того, на шаге уточнения расстояний d_i необходима проверка условий (8). Этого можно достигнуть при выполнении соотношений

$$d_i^{k+1}=\begin{cases} d_i^{(k+1)} & \text{— если (8) выполняется,}\\ d_i^{(k)} & \text{— если (8) не выполняется,}\end{cases} \tag{10}$$

что вполне обосновано, если на каждом шаге такого итеративного процесса соблюдены условия монотонности. В нашей ситуации это означает последовательное уменьшение стандарта σ_N аппроксимации после уточнения параметров каждого вида (m_i, d_i, ϑ_i, λ_i). Если улучшения стандарта после какого-либо шага уже не происходит, то нужно вернуться к параметрам, полученным на предыдущей итерации и закончить процесс для конкретного N на шаге уточнения значений m_i точечных масс. Тем самым всегда будет выполняться (7), а сам процесс будет обеспечивать увеличение точности σ_N аппроксимации. Если $\sigma_N > \sigma$ (требуемой точности описания поля), то после добавления в местах наибольших остаточных уклонений нужного числа масс необходимо повторять процесс с учетом добавленных точечных масс до тех пор, пока $\sigma_N \leqslant \sigma$. Таким образом, каждая итерация включает в себя четыре шага (по числу типов уточняемых параметров), а сам процесс заканчивается всегда после уточнения масс m_i.

6. Разработанный алгоритм тщательно апробировали при создании моделей точечных масс глобального гравитационного поля Земли. В качестве исходной информации использованы как аномалии силы тяжести, так и высоты геоида, вычисляемые в центрах равновеликих трапеций 5×5° на основании моделей гармоник GEM-9 и GEM-10 B. Как и в более ранних работах [3], поле моделировали не традиционной системой функций (1), а «двойными», или «сопряженными» [3], точечными массами, фактически наборами четных и нечетных гармонических функций, ортогональных в H_2^q [5].

Таким образом, аппроксимировали поле, соответствующее следующим порядкам усечения GEM-9: (8×8) — M2A (48); (12×12) — M3A (57); (29×12) — M3B (61); (29×16) M3C (71); (29×20) — M4A (83); а также GEM — 10 B: (24×24) — M5 (103); (28×28) — M6 (110); (32×32) — M7 (124); (36×36) — M8 (128)*. В результате можно сделать следующие выводы.

1. Использование ядра ЧНВ-2, хорошо согласованного со спектром степенных дисперсий c_n и общей дисперсией 5° поля аномалий силы тяжести, позволило параметр регуляризации принимать равным единице. Качества получаемых со стабилизатором в виде (5) решений характеризует следующий численный эксперимент. Предположим, что с помощью обсуждаемого алгоритма определены параметры N точечных масс. Расширим количество искомых величин m_i масс до $(N+k)$, выбрав координаты дополнительных k точечных масс, в точности совпадающими с координатами d_i, ϑ_i, λ_i одной, например i-й ($1 \leqslant i \leqslant N$), из определенных ранее. Если искать теперь значения всех $(N+k)$ масс по способу наименьших квадратов, то определитель системы $(N+k)$ нормальных уравнений будет равен нулю в силу линейной зависимости $(k+1)$. Из них и мы приходим к ситуации, в которой получить решение невозможно. Использование же описанного метода позволяет найти все $(N+k)$ значения масс, причем сумма значений $(k+1)$ точечных масс, относящихся к i-й точке, равна значению i-й массы, которую определяли ранее в случае их общего числа N, остальные $(N-1)$ значения точечных масс из таких двух вариантов оказываются одинаковыми. Последнее, таким образом, свидетельствует как об устойчивости получаемых решений, так и о правильном подходе к выбору стабилизатора задачи.

2. Существенной на практике оказалась проверка условия монотонности на каждом шаге итерационного процесса. Это обеспечило всегда устойчивое построение минимизирующей последовательности $\{T_N\}$.

3. При раздельном уточнении (m_i, d_i, ϑ_i, λ_i) с помощью (6) более эффективные результаты дает процесс типа Гаусса—Зейделя, когда на последующем шаге используются (внутри одной итерации) улучшенные на предыдущих шагах параметры, чем такой алгоритм, в котором итерационное уточнение выполняется для каждого вида параметров в отдельности. Например, по сравнению с построенной ранее методом наименьших квадратов моделью M3 (63 сопряженные точечные массы, описывающие поле (12×12)), предлагаемый алгоритм обеспечивает ту же точность аппроксимации с помощью лишь 53—54 масс. При том же числе масс, что и в модели M2 [3] (представляющей поле (8×8) с помощью 48 сопряженных точечных масс), данным алгоритмом удается повысить точность аппроксимации примерно в 1,5 раза.

4. При методе регуляризации со стабилизатором ЧНВ-2 значительно улучшается спектр степенных дисперсий c_n многоточечных моделей, даже если в качестве исходных используются данные не об аномалиях силы тяжести, а о высотах геоида (информация не о производной потенциала, а фактически о самой функции T).

5. Построенные вариационным методом модели точечных масс апробировали при вычислении орбиты ИСЗ «Лагеос». Так, в случае использования решения M3A (57 сопряженных точечных масс, описывающих поле (12×12)) после дифференциального уточнения орбиты среднеквадратическое значение $(O-C)$ на 2,5-суточной дуге составило ~0,5 м, а на 5-суточной дуге ~0,6 м. При обработке тех же наблюдений с помощью ранней модели M3 соответствующие среднеквадратические значения $(O-C)$ равны ~1,1 м и ~1,2 м. Даже при уменьшении числа масс с 63 до 57 использование этого алгоритма позволило существенно улучшить качества получаемой модели: точность представления орбиты спутника улучшилась в два раза.

6. Полученные модели точечных масс теперь можно использовать в качестве начального приближения при аппроксимации геопотенциала по наблюдениям, обеспечивающим разную степень детализации поля, в том числе и по спутниковым наблюдениям [6]. Кроме того, их вполне можно применять и при массовых вычислениях орбит. Так, в случае применения модели M4A (83 сопряженные массы), описывающей полный набор гармоник GEM-9,

* В скобках указано количество сопряженных точечных масс, аппроксимирующих с точностью 1,5—2 м «высоты геоида» соответствующих наборов гармоник. Например, набор M8 содержит 128 сопряженных масс и описывает поле GEM-10 B до 36 порядка и степени включительно.

Параметры модели М4А сопряженных точечных масс, аппроксимирующей геопотенциал, описываемый полным набором гармоник GEM-9*

№ п/п	$\mu_i \cdot 10^6$ (ед. массы Земли)	D_i (ед. экваториального радиуса)	ϑ_i° (полярное расстояние)	λ_i° (долгота)
1	$-539{,}50280 \cdot 10^6$	$0{,}1 \cdot 10^{-2}$	0,0	0,0
2	$539{,}50280 \cdot 10^6$	$0{,}81932823 \cdot 10^{-4}$	90,00	165,0656
3	1,23495	0,7726	9,60	236,60
4	1,31200	0,7647	31,75	220,94
5	1,46288	0,7581	79,94	332,11
6	2,71647	0,7858	88,43	284,18
7	0,86628	0,8515	79,67	116,59
8	0,99076	0,7934	26,83	330,31
9	1,10914	0,7133	52,45	257,12
10	0,99920	0,7896	28,01	140,72
11	0,94487	0,7577	65,10	64,90
12	0,57084	0,8217	66,00	352,23
13	—1,42246	0,7444	49,48	296,82
14	—2,40408	0,7663	63,72	290,40
15	—0,40253	0,8536	16,14	164,66
16	—1,39807	0,7675	44,57	91,32
17	—2,37941	0,7658	81,06	82,40
18	— 2,18667	0,6702	66,65	162,40
19	—0,78105	0,8098	52,72	177,44
20	—1,125[illegible]9	0,7033	64,45	224,30
21	—1,42101	0,7035	22,14	21,80
22	0,44818	0,8840	69,26	197,06
23	0,47184	0,8[illegible]32	49,85	34,53
24	—1,59162	0,8218	26,76	273,64
25	0,29615	0,9052	84,6[illegible]	37,90
26	0,47561	0,8614	63,47	82,62
27	1,47788	0,6976	43,50	256,82
28	0,29623	0,8515	23,54	280,20
29	— 0,49920	0,8900	56,20	312,10
30	1,30539	0,8201	53,18	323,92
31	0,36537	0,9054	34,58	52,36
32	—1,05289	0,8006	59,94	334,08
33	—0,60109	0,8482	40,08	52,92
34	0,14357	0,9178	57,41	119,94
35	—0,12977	0,9209	80,44	306,60
36	— 0,08693	0,9370	81,64	183,10
37	— 0,18452	0,9068	62,24	22,56
38	0,47982	0,7574	55,87	3,97
39	—0,18672	0,8854	32,01	359,31
40	— 0,11391	0,8393	87,37	17,66
41	—5,27737	0,5587	55,22	229,49
42	2,55994	0,5819	16,93	357,62
43	—5,41874	0,5835	75,24	322,87
44	—1,42076	0,4973	80,49	319,66
45	1,45801	0,8105	30,86	212,82
46	3,24649	0,7205	50,40	321,82
47	9,60485	0,7050	60,67	48,49
48	—9,29082	0,5700	63,26	65,76
49	—1,77284	0,7812	50,81	160,30
50	2,12833	0,7462	84,03	223,39
51	2,39444	0,7377	73,96	276,08
52	1,56830	0,7101	76,30	7,18

Продолжение таблицы

№ п/п	$\mu_i \cdot 10^6$ (ед. массы Земли)	D_i (ед. экваториального радиуса)	ϑ_i° (полярное расстояние)	λ_i° (долгота)
53	0,71406	0,8265	83,66	349,31
54	— 0,69324	0,7040	59,62	8,62
55	1,14815	0,8398	31,67	91,31
56	—3,98619	0,7762	33,08	101,38
57	—2,29375	0,7184	49,07	225,19
58	1,36106	0,7908	44,62	249,31
59	—1,58486	0,7893	33,91	269,16
60	2,17047	0,7508	88,97	123,94
61	—1,99410	0,7749	83,11	74,59
62	1,45212	0,7731	61,53	83,34
63	1,92260	0,6932	45,91	18,96
64	—3,83518	0,6502	74,08	242,51
65	2,48937	0,7854	17,59	328,37
66	—1,45149	0,7742	58,39	112,72
67	4,06253	0,7201	47,25	137,43
68	—2,36796	0,7421	16,40	251,90
69	—1,22788	0,8254	72,02	357,09
70	—0,44664	0,9017	73,37	110,78
71	0,64456	0,8504	89,43	201,99
72	0,26294	0,9269	34,64	102,43
73	0,98167	0,8198	61,01	222,10
74	—0,83218	0,8280	33,56	39,48
75	—0,28214	0,8939	69,45	294,07
76	0,43033	0,8216	3,62	160,06
77	0,86659	0,8056	24,69	47,25
78	0,91396	0,8167	78,60	258,30
79	— 0,06533	0,9450	49,57	1,84
80	—2,81343	0,7998	62,46	47,81
81	—0,88434	0,7951	57,76	25,31
82	—0,68300	0,8059	45,78	57,74
83	0,08683	0,9373	86,44	93,80

* $\mu_i = m_i/fM$ — величина m_i i-й точечной массы, выраженная в единицах массы планеты ($fM = 398600{,}64 \cdot 10^9$ м³/с²); $D_i = d_i/a$ — относительное расстояние ($a = 6378139$ м); ϑ_i, λ_i — соответственно полярное расстояние и долгота i-й массы. Нормальное поле задается потенциалом $U = fM/r$ центральной массы; для вычисления $V = U + T$ необходимо использовать соотношение (5) из [3] и параметры модели из данной таблицы: $S_1 = 40$, $S_2 = 83$.

в дифференциальном уточнении орбиты «Лагеос» (на интервале в 2,5 и 5 сут) среднеквадратическое значение величин (O—C) получается таким же, как и с использованием полного набора гармоник GEM-9; причем экономия вычислительного времени при обработке одной дуги достигает 50% (см. таблицу).

Подобный (по точности представления орбиты) результат приведен в [13], где обсуждается модель ста точечных масс, представляющих возмущающий потенциал в виде (1); нормальное поле описано гармониками GEM-10 до 4-го порядка и степени включительно. Эта модель получена из аппроксимации компонент $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ функции grad V по GEM-10 с применением итерационного процесса типа (6), в котором оператор B заменен единичной матрицей, а подбираемый параметр регуляризации $\beta_k = \alpha$ отличен от единицы; кроме того, все параметры уточняются одновременно. Однако, сравнивая обсуждаемые подходы построения моделей М4А и в [13], отметим то существенное обстоятельство, что в [13] в качестве исходной информации использовались значения производных $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$, которые как раз и присутствуют в правых частях уравнений движения при вычислении орбит ИСЗ. При построении же модели М4А исходными данными были, фактически, значения функции V, но применение в качестве стабилизатора задачи квадрата нормы потенциала (5) с параметрами воспроизводящего ядра ЧНВ-2 [5] позволило с необходимой для вычисления орбиты ИСЗ «Лагеос» точностью получать и сами производные $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$. Последний факт имеет необходимое теоретическое обоснование [14, 10], из которого следует (при трактовке потенциала T как элемента гильбертова пространства H_q с воспроизводящим ядром) равномерная аппроксимация как самой функции T, так и ее первых производных в случае $q = 2{,}5$.

Список литературы: 1. *Алексидзе М. А.* Об одном представлении аномального гравитационного поля. — ДАН СССР, 1966, т. 170, № 4. 2. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. 3. *Марченко А. Н.* Модель точечных масс глобального гравитационного поля Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 32. 4. *Марченко А. Н.* О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, вып. 3. 5. *Марченко А. Н.* Гильбертовы пространства функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара, и глобальная ковариационная функция аномального поля. — К., 1983. — Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 293, Ук-Д83. 6. *Марченко А. Н.* О построении модели точечных масс, геопотенциала по результатам спутниковых наблюдений. — К., 1983. — Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 292, Ук-Д83. 7. *Марченко А. Н.* Об использовании фундаментальных решений уравнения Лапласа для определения гравитационного поля и фигуры Земли. — In: Proc. Int. Symp. Figur of the Earth, the Moon and other Planets. Monograph Series of VUGTK. Prague, 1983. 8. *Марченко А. Н.* О выборе стабилизатора для устойчивой аппроксимации потенциала рядом фундаментальных решений уравнения Лапласа. — In: Proc. Int Symp. Figur of the Earth, the Moon and other Planets. Monograph. Series of VUGTK. Prague, 1983. 9. *Мещеряков Г. А.* Обратные задачи теории геопотенциала. — К., 1983. — (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики). 10. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 11. *Старостенко В. И., Оганесян С. М.* Методы регуляризации и оптимизации в гравиметрии. — В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. К., 1983. 12. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 13. *Barthelmes F., Kautzleben H.* A new method of modelling the gravity field of the Earth by point masses. — Paper presented to the General Assembley of the IAG, Simposium C., Improved gravity field estimation on a global basis. Hamburg, 1983. 14. *Krurup T.* A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. — Danis Geod. Inst., 1969, № 44. 15. *Tsherning C. C., Rapp R.* Closed covariance expression for gravity anomalies, geoid undulations and defections of vertical implied by anomaly degree variance models. — Report Dept of Geod. Sci. Ohio. State Univer., 1974, № 208.

Статья поступила в редколлегию 22. 11. 83

УДК 528.3

Д. И. МАСЛИЧ

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА РЕФРАКЦИИ НА МОРСКИХ ТРАССАХ

В производственных условиях для учета вертикальной рефракции используют коэффициент рефракции k, который или принимают средним, или определяют для данного локального региона. Коэффициент рефракции входит в формулы для вычисления превышения [6], для его среднего значения составлены специальные таблицы как для малых, так и больших расстояний. В последнее время вводится специальная поправка в определяемое превышение электронными автоматическими приборами с использованием среднего значения k. Между тем установлено, что значение коэффициента рефракции непостоянно и зависит от физико-географических условий, периода года и суток, высоты луча, стратификации воздушных масс и многих других факторов.

Теоретически k наиболее полно выражается одним из следующих соотношений:

$$k = \frac{R_з}{R_1}; \ (а) \quad k = -R_з \frac{dn}{dh} \sin z/n; \ (б) \quad k = \varkappa_0 + q \frac{c}{h_\circ} (в), \qquad (1)$$

где $R_з$ и R_1 — радиусы кривизны Земли и траектории волны в данной точке; n и dn/dh — показатель преломления воздуха и его вертикальный градиент; z — измеряемое зенитное расстояние; $\varkappa_0 = 18{,}56 \frac{p}{T^2}$; $q = 668{,}7 \frac{p}{T^2}$; p и T — давление и температура воздуха; c — аномальная часть градиента температуры на высоте 1 м над почвой; $h_\circ$ — среднеинтегральная высота над подстилающей поверхностью.

Из (1а), (1б) следует, что коэффициент рефракции имеет смысл в том случае, когда изменения вертикального градиента показателя преломления незначительны, т. е. когда траектория волны располагается вдоль земной поверхности. При наблюдении высоких объектов, для которых dn/dh заметно меняется, значение k для учета влияния рефракции использовать нельзя. Формула (1в) позволяет определять коэффициент рефракции, если температурный градиент, который в настоящее время трудно определить, известен вдоль всей трассы.

Исследования показали, что коэффициент рефракции следует представлять из нормальной, или регулярной, части $k_н$ и периодически меняющейся нерегулярной части Δk:

$$k = k_н + \Delta k. \qquad (2)$$

Наиболее устойчивое влияние рефракции наблюдается в периоды спокойных изображений, которые наступают обычно через 1...1,5 часа после восхода Солнца и за 1,5...2 часа до его заката.