УДК 528.33 : 528.28

Л. Н. ПЕРОВИЧ

О ВЫГОДНЕЙШЕЙ ФОРМЕ ТРЕУГОЛЬНИКА В ЗВЕНЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И АЗИМУТА

В треугольнике звена пространственной триангуляции имеются точные значения астрономических координат φ_1, λ_1 пункта 1 и азимута α_{12}. Из формул работы [1] можно получить значения координат φ_2, λ_2 пункта 2 и азимута α_2.

В работе [4] приводятся формулы для вычисления ошибок $\Delta\varphi_2$, $\Delta\lambda_2$ и $\Delta\alpha_{21}$, обусловленных ошибками измерений при передаче координат и азимута. Заменяя в этих формулах дифференциалы конечными приращениями, получаем

$$\Delta\varphi_2 = -\cos\alpha_{21}(\Delta z_{12} + \Delta z_{21}) + \sin\alpha_{21}\sin z_{21}\,\Delta\psi;$$

$$\Delta\lambda_2 = -\sin\alpha_{21}\sec\varphi_2(\Delta z_{12} + \Delta z_{21}) - \cos\alpha_{21}\sec\varphi_2\sin z_{21}\,\Delta\psi; \qquad (1)$$

$$\Delta\alpha_{21} = -\sin\alpha_{21}\operatorname{tg}\varphi_2(\Delta z_{12} + \Delta z_{21}) - (\sin z_{21}\cos\alpha_{21}\operatorname{tg}\varphi_2 - \cos z_{21})\,\Delta\psi.$$

В формулах (1) величины Δz представляют собой ошибки измерений зенитных расстояний z. Порядок следования индексов при Δz и z определяется вершиной, где стоял угломерный инструмент, и вершиной, зенитное расстояние которой измеряется. Например, z_{13} есть зенитное расстояние, измеренное из пункта 1 на пункт 3.

Величина $\Delta\psi$ является функцией ошибок измерений всех зенитных расстояний и горизонтальных углов, которые участвуют в передаче φ, λ и α. Функцию $\Delta\psi$ представляем в виде

$$\Delta\psi = -k_1\Delta z_{12} + k_2\Delta z_{13} + k_3\Delta a_1 + k_1'\Delta z_{21} - k_2'\Delta z_{23} - k_3'\Delta a_2, \qquad (2)$$

где Δa_1 и Δa_2 — ошибки измерений горизонтальных углов a_1 и a_2 в пунктах 1 и 2; k_1, k_2, k_3, k_1', k_2' и k_3' — коэффициенты, которые можно вычислить по формулам:

$$k_1 = \frac{\sin a_1 \sin z_{13}\cos A_1}{\sin^2 A_1};$$

$$k_2 = \frac{\sin a_1 \sin z_{12}}{\sin^2 A_1};$$

$$k_3 = \frac{\sin z_{13}}{\sin A_1}\left[1 - \frac{\sin^2 a_1 \sin^2 z_{12}}{\sin^2 A_1}\right]^{1/2}; \qquad (3)$$

$$\cos A_1 = \cos z_{12}\cos z_{13} + \sin z_{12}\sin z_{13}\cos a_1. \qquad (4)$$

Аналогичным образом можно вычислить коэффициенты k_1', k_2' и k_3' через элементы треугольника, измеренные в пункте 2.

Из формулы (2) видно, что при заданных значениях Δz и Δa величина функции $\Delta\psi$ зависит от значений коэффициентов k_1, k_2, k_3, k_1', k_2'

и k'_3. Величины этих коэффициентов зависят от элементов пространственного треугольника, то есть от формы данного треугольника.

Поэтому для определения выгоднейшего треугольника передачи координат φ, λ и азимута α необходимо исследовать, при каких значениях a_1, a_2, z_{12}, z_{21}, z_{13}, z_{23} величины k_1, k_2, k_3, k'_1, k'_2 и k'_3 принимают минимальные значения.

Заметим, что в реальных условиях (то есть на земной поверхности) зенитные расстояния редко выходят за пределы 85—95°. Поэтому значение величины плоского угла A_1, вычисляемое по формуле (4), будет мало отличаться от значения величины его горизонтального угла a_1.

Анализируя формулу (3), можно сделать вывод, что изменение зенитных расстояний в вышеуказанных пределах будет в незначительной мере влиять на изменение коэффициентов k_1, k_2, k_3. Величины этих коэффициентов, а также коэффициентов k'_1, k'_2 и k'_3 будут зависеть главным образом от значений величин горизонтальных углов.

Полагая в выражениях (3) $a_1 = A_1$, получаем

$$k_1 = \frac{\sin z_{13} \cos a_1}{\sin a_1}; \quad k_2 = \frac{\sin z_{12}}{\sin a_1}; \quad k_3 = \frac{\sin z_{13} \cos z_{12}}{\sin a_1}. \tag{5}$$

Из выражения (5) видно, что с приближением величины a_1 к 90° абсолютные значения коэффициентов будут уменьшаться.

Уменьшение значений коэффициентов приведет к уменьшению функции $\Delta\psi$, а значит, и к уменьшению ошибок $\Delta\varphi_2$, $\Delta\lambda_2$, $\Delta\alpha_{21}$.

Для подтверждения этих выводов вычисляем по формулам (3) коэффициенты k_1, k_2 и k_3 для различных значений горизонтальных углов и постоянных значений зенитных расстояний. Для вычисления используем следующие значения величин элементов пространственного треугольника, построенного в районе Карпат:

$$a_1 = 68°02'16''; \quad z_{12} = 89°54'34''; \quad z_{13} = 89°01'24'';$$
$$a_2 = 59°13'11''; \quad z_{21} = 90°11'01''; \quad z_{23} = 89°13'14''.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1. Из табл. 1 видно, что значения коэффициентов k_1, k_2 и k_3 значительно уменьшаются с приближением значений горизонтальных углов к 90° (как предполагалось ранее), то есть точность передачи астрономических координат и азимута в этом случае повышается.

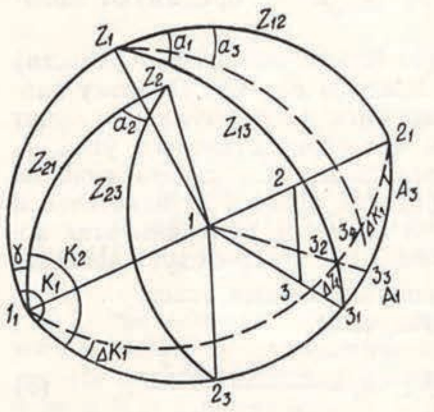
Таблица 1

Зависимость изменения величин коэффициентов от величины горизонтального угла

a, градусах	k_1	k_2	k_3
10	5,63	5,71	0,51
20	2,74	2,92	0,12
30	1,73	2,00	0,05
40	1,19	1,56	0,03
50	0,84	1,30	0,02
60	0,57	1,15	0,01
70	0,36	1,06	0,00
80	0,17	1,01	—
90	0,00	1,00	—

Поскольку коэффициенты k_3 значительно меньше коэффициентов k_1 и k_2, то ошибки измерений горизонтальных углов в значительно меньшей степени влияют на точность передачи координат φ, λ и вычисления обратного азимута α_{21}.

Результаты исследований показывают, что изменение зенитных расстояний в пределах 85—95° мало влияет на точность передачи φ, λ и азимута α. Так, например, при $a=60°$ изменение зенитных расстояний (85—95°) практически не изменяет значения величины коэффициента k_1, а величины коэффициентов k_2 и k_3 изменяются соответственно на 0,02 и 0,2.



Построения на вспомогательной сфере.

Из выражений (1) видно, что при передаче координат и азимута вдоль меридиана ($\sin \alpha_{21}=0$) форма пространственного треугольника не влияет на точность передачи астрономической широты. Однако в этом случае ошибки в долготе и азимуте будут максимальными. И наоборот, при передаче φ, λ и α вдоль параллели ($\cos \alpha_{21}=0$) ошибки в λ и α будут минимальными, а в широте — максимальными.

Некоторые наши выводы подтверждены геометрически (см. рисунок). Но прежде всего запишем формулы для передачи координат φ, λ и азимута α [2]

$$\sin \varphi_2 = -\sin \varphi_1 \cos (z_{12}+z_{21}) - \cos \varphi_1 \left[\cos \alpha_{12} \sin (z_{12}+z_{21}) + \right.$$

$$\left. + \sin \alpha_{12} \sin z_{21} \frac{\gamma''}{\rho''} \right]; \qquad (6)$$

$$\sin \alpha_{21} = \frac{-\cos \varphi_1 \left(\sin \alpha_{12} - \cos \alpha_{12} \cos z_{12} \frac{\gamma''}{\rho''} \right) - \sin \varphi_1 \sin z_{12} \frac{\gamma''}{\rho''}}{\cos \varphi_2};$$

$$\sin \lambda_{12} = \frac{-\sin \alpha_{12} \sin (z_{12}+z_{21}) + \cos \alpha_{12} \sin z_{21} \frac{\gamma''}{\rho''}}{\cos \varphi_2};$$

$$\gamma = \pm (K_1 - K_2). \qquad (7)$$

Значения величин K_1 и K_2 можно вычислить, например, по формулам работы [1]:

$$\operatorname{ctg} K_1 = \frac{\operatorname{ctg} z_{13} \sin z_{12}}{\sin a_1} - \cos z_{12} \operatorname{ctg} a_1; \qquad (8)$$

$$\operatorname{ctg} K_2 = \frac{\operatorname{ctg} z_{23} \sin z_{21}}{\sin a_2} - \cos z_{21} \operatorname{ctg} a_2.$$

В формулах (6) λ_{12} равняется разности долгот пунктов 2 и 1.

На вспомогательной единичной сфере с центром в пункте 1 построены сферические треугольники (см. рисунок). Вершинами треугольников служат точки пересечения со сферой направлений сторон пространственного треугольника и отвесных линий.

Пусть зенитное расстояние z_{13} ошибочно на величину Δz_1. В этом случае ошибка в угле K_1 будет равна ΔK_1.

Для получения угла γ необходимо повернуть сферический двугранник $Z_1 1_1 2_1 3_2$ вокруг линии $1_1 2_1$ до совпадения точки 3_2 с точкой 3_1. В таком случае ошибка в угле γ будет равна ΔK_1.

В свою очередь ошибка в угле γ будет вызывать ошибки в φ, λ и α.

Допустим, что горизонтальный угол a_1 и соответствующий ему плоский угол A_1 изменились на некоторую величину и стали равными соответственно a_3 и A_3.

Из рисунка видно, что $\Delta z_1 > \Delta z_2$. Однако ошибки Δz_1 или Δz_2 вызывают в угле K_1 одну и ту же ошибку ΔK_1. Ошибке ΔK_1 (см. рисунок) будет соответствовать наибольшая ошибка в зенитном расстоянии z_{13} при $A_1 = 90°$.

Таким образом, еще раз подтверждается вывод о том, что для передачи координат φ, λ и азимута α лучше всего использовать плоские или горизонтальные углы, близкие к 90°.

Аналогичным образом можно показать, что при заданных значениях ошибок зенитных расстояний z_{12}, z_{21}, z_{23} ошибка в угле γ будет принимать наименьшее значение тогда, когда плоские (горизонтальные) углы будут близки к 90° [3].

Из сферических треугольников $З_2 2_1 З_1$ и $З_4 2_1 З_3$ можно получить соотношение, связывающее ошибки Δz_1 и Δz_2 с величинами углов A_1 и A_3.

Учитывая малость величин Δz_1 и Δz_2 из решения данных треугольников после несложных преобразований, имеем

$$\frac{\Delta z_1}{\Delta z_2} = \frac{\sin A_1}{\sin A_3}. \tag{9}$$

Вопрос влияния значений горизонтальных углов на точность передачи астрономических координат и азимута проверялся экспериментально. Для этого была произведена передача координат φ, λ и азимута α по треугольникам с разными значениями горизонтальных углов.

Передача координат и азимута выполнялась по замкнутому ходу, состоящему из трех сторон. Передачу производили сначала по треугольникам с горизонтальными углами у основания, равными около 20°, а затем около 40 и 60°.

Координаты начального пункта снимали с географической карты и принимали за исходные. Астрономический азимут начального направления определяли тремя приемами приближенным способом по часовому углу Полярной.

Средняя квадратическая ошибка полученных измерений зенитных расстояний равна $\pm 4'',1$.

Величина невязки в замкнутом ходе составляет $+2'',8$.

Вычисления координат и азимутов хода передачи выполняли по формулам (6). После завершения вычислений по передаче координат φ, λ и азимута α были вычислены невязки:

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi_1 = \varphi_{\text{исх}} - \varphi'_{\text{выч}};\ \Delta\varphi_2 = \varphi_{\text{исх}} - \varphi''_{\text{выч}};\ \Delta\varphi_3 = \varphi_{\text{исх}} - \varphi'''_{\text{выч}};\\
&\Delta\lambda_1 = \lambda_{\text{исх}} - \lambda'_{\text{выч}};\ \Delta\lambda_2 = \lambda_{\text{исх}} - \lambda''_{\text{выч}};\ \Delta\lambda_3 = \lambda_{\text{исх}} - \lambda'''_{\text{выч}};\\
&\Delta\alpha_1 = \alpha_{\text{исх}} - \alpha'_{\text{выч}};\ \Delta\alpha_2 = \alpha_{\text{исх}} - \alpha''_{\text{выч}};\ \Delta\alpha_3 = \alpha_{\text{исх}} - \alpha'''_{\text{выч}},
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\varphi_{\text{исх}}$, $\lambda_{\text{исх}}$ — исходные координаты начального пункта; $\varphi'_{\text{выч}}$, $\lambda'_{\text{выч}}$, $\varphi''_{\text{выч}}$, $\lambda''_{\text{выч}}$, $\varphi'''_{\text{выч}}$, $\lambda'''_{\text{выч}}$ — вычисленные координаты начального пункта по треугольникам с горизонтальными углами, равными соответственно около 20, 40 и 60°; $\alpha_{\text{исх}}$ — исходный азимут начального направления; $\alpha'_{\text{выч}}$, $\alpha''_{\text{выч}}$, $\alpha'''_{\text{выч}}$ — вычисленные азимуты начального направления по горизонтальным углам 20, 40 и 60°.

Невязки $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ и $\Delta\alpha$ приведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что точность передачи астрономических координат и азимута значительно зависит от значений горизонтальных углов, по которым она производится.

Таблица 2

Невязки астрономических координат и азимута

№ варианта	Углы треугольников, градусах	Невязки		
		$\Delta\varphi$	$\Delta\lambda$	$\Delta\alpha$
1	20	$-25{,}0'$	$+56{,}0'$	$+42{,}6'$
2	40	$+5{,}5'$	$+10{,}7'$	$+8{,}1'$
3	60	$-4{,}3'$	$-4{,}6'$	$-3{,}3'$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудский В. И. Некоторое обобщение формул передачи астрономических координат и азимута. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, вып. 4.

2. Рудский В. И. Совместное уравнивание горизонтальных углов и зенитных расстояний. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, вып. 5.

3. Рудский В. И. Совместное уравнивание горизонтальных и вертикальных углов триангуляции. Автореферат канд. дисс. М., 1969.

4. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1967, вып. 6.

Работа поступила в редколлегию 23 января 1974 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и гравиметрии Львовского политехнического института.