

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

# О РАЗЛОЖЕНИИ ПО ШАРОВЫМ ФУНКЦИЯМ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО В ПЛОСКОСТИ ЭКВАТОРА ПЛАНЕТЫ

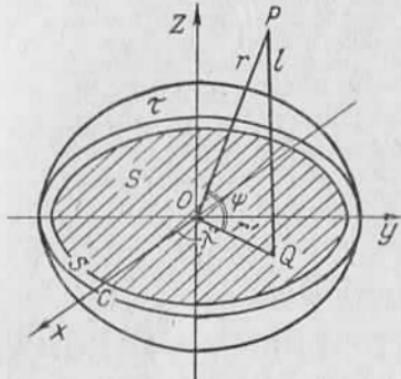
Как показано в [3], нечетная относительно экваториальной плоскости планеты часть  $V_{\text{неч}}$  потенциала  $V$  ее притяжения может трактоваться потенциалом  $V''=V_{\text{неч}}$  двойного слоя, находящегося в указанной плоскости и имеющего очертания экваториального сечения планеты. Этот слой назван дипольным диском (ДД) в отличие от материального диска (МД), имеющего ту же геометрию, что и ДД, но несущего на себе простой слой, потенциал  $V'$  которого описывает четную часть  $V_{\text{чет}}$  — потенциала  $V$  планеты, причем сумма потенциалов этих дисков выражает потенциал планеты  $V_{\text{чет}}+V_{\text{неч}}=V$ .

Для развития и использования предлагаемой концепции гравитирующих дисков необходимо иметь разложения их внешних потенциалов по шаровым функциям, которые в принципе легко получить в соответствии с известной традиционной схемой разложения объемного потенциала. Однако, если разложение  $V'=V_{\text{чет}}$  буквально повторяет разложение  $V$  (незначительное отличие обусловлено определяющим потенциал  $V'$  характером концентраций масс, приводящим к другому виду коэффициентов ряда), то разложение потенциала  $V''$  двойного слоя требует привлечения аппарата ультрасферических многочленов — полиномов Гегенбауэра [1, 4, 5], что определяет специфику вывода искомого представления. Поэтому остановимся на нем более подробно.

Обозначим площадь плоского диска буквой  $S$ , а его контур —  $s$ ; будем считать, что планетоцентрический радиус-вектор контура диска  $r_s'=r_c'-e$ , где  $r_c'$  — радиус-вектор экваториального сечения планеты, а  $e>0$  — сколь угодно малая величина. Пользуясь далее квазипланетоцентрической системой координат  $Oxyz$  (см. рисунок), будем задавать точку  $P$ , внешнюю относительно пла-

неты  $\tau$ , либо ее прямоугольными координатами  $x, y, z$ , либо сферическими  $r, \vartheta, \lambda$ , а точку  $Q$  слоя ДД — также прямоугольными  $x_Q = \xi, y_Q = \eta$  или полярными  $r', \lambda'$  (для нее  $z_Q = \zeta = 0$ , а  $\vartheta = \pi/2$ ).

Выбирая в плоской области  $S$  слоя ДД за положительное направление нормали  $n$  отрицательное направление оси  $Oz$ , выпи-



Дипольный диск.

шем выражения потенциала двойного слоя, расположенного на  $S$  и имеющего плотность  $v$ ,

$$V''(P) = -f \int_S v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{l} \right) dS = f \int_S \frac{z v(\xi, \eta) dS}{(V(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2)^3} = \\ = f \int_S \frac{z_p v_a dS_a}{l_{PQ}^3}, \quad (1)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная;  $z_p = r_p \cos \vartheta_p$ ;

$$l_{PQ} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi} = r(1 - 2h \cos \psi + h^2)^{1/2},$$

причем для любой точки  $P$ , внешней относительно  $S$ ,  $h = r'/r < 1$ .

Из последнего выражения (1) следует, что во всех точках экваториальной плоскости вне слоя  $V''(x, y, O) = 0$ , так как при этом  $z = 0$ . Далее считаем, что угол принадлежит открытому промежутку  $(0, 2\pi)$ , т. е. случаи выполнения равенств  $\psi = 0$  и  $\psi = 2\pi$  исключены.

Для получения нужного представления потенциала  $V''(P)$  разложим  $1/l_{PQ}^3$  в ряд по степеням  $h = r'/r$ . С этой целью вспомним производящую функцию полиномов Гегенбауэра:  $C_n^k(\cos \psi)$  [1, 4, 5]

$$(1 - 2h \cos \psi + h^2)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^k(\cos \psi) h^n,$$

причем степенной ряд, фигурирующий справа, является абсолютно сходящимся при всяком  $h < 1$ .

Значит, в нашем случае

$$V''(P) = (f/r^3) \int_s z_P v_Q \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{3/2} (\cos \psi) h^n \right) ds.$$

Обращаясь теперь к теореме сложения многочленов Гегенбауэра, выпишем ее при  $k=3/2$  и  $\theta=\pi/2$ :

$$C_n^{3/2}(\cos \psi) = C_n^{3/2}(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda')) =$$

$$= \sum_{m=0}^n 2^{m+1} (m+1)(n-m)! \frac{[(3/2)_m]^2}{(2)_{n+m+1}} (\sin \vartheta)^m C_{n-m}^{\frac{3}{2}+m} \cos \vartheta(0) C_m^1(\cos(\lambda-\lambda')),$$

$$\text{где } (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k+1); \quad (\alpha)_0 = 1,$$

$$\text{а } C_V^{\frac{3}{2}+m}(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } V \text{ нечетном;} \\ (-1)^V \left(\frac{3}{2}\right)_{V/2} & \text{при } V \text{ четном.} \end{cases}$$

Проинтегрируем почленно ряд, которым выражен теперь потенциал двойного слоя; в результате получим

$$V'' \sec \vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n \frac{2^{m+1} (m+1)(n-m)! [(3/2)_m]^2}{(2)_{n+m+1}} \times \\ \times C_{n-m}^{\frac{3}{2}+m}(0) (\sin \vartheta)^m C_{n-m}^{\frac{3}{2}+m}(\cos \vartheta) \int_s v(\xi, \eta) r'^n C_m^1(\cos(\lambda-\lambda')) dS.$$

Займемся входящими сюда интегралами по ДД

$$J_{nm} = \int_s v r'^n C_m^1(\cos(\lambda-\lambda')) dS.$$

Рассмотрим суммы [1], определяющие  $C_m^1(\cos \gamma)$ , где  $\gamma = \lambda - \lambda'$ :

$$C_m^1(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^m \cos[(m-2k)\gamma] = \sum_{k=0}^m [\cos(m-2k)\lambda] \times \\ \times [\cos(m-2k)\lambda'] + \sum_{k=0}^m [\sin(m-2k)\lambda][\sin(m-2k)\lambda'].$$

$$\text{Значит, } J_{nm} = \sum_{k=0}^m a_{nmk} \cos(m-2k)\lambda + \sum_{k=0}^m b_{nmk} \sin(m-2k)\lambda,$$

$$\text{где } \left. \begin{array}{l} a_{nmk} \\ b_{nmk} \end{array} \right\} = \int_s v r'^n \left\{ \begin{array}{l} \cos(m-2k)\lambda' \\ \sin(m-2k)\lambda \end{array} \right\} dS. \quad (2)$$

Обозначив еще

$$M_{nm} = \{2^{m+1} (m+1) (n-m)! [(3/2)_m]^2 C_{n-m}^{\frac{3}{2}+m} (0)\} / (2)_{n+m+1}, \quad (3)$$

запишем  $V'' \sec \vartheta = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n M_{nm} (\sin \vartheta)^m C_{n-m}^{\frac{3}{2}+m} (\cos \vartheta) \times$

$$\times [\sum_{k=0}^m a_{nmk} \cos (m-2k) \lambda + \sum_{k=0}^m b_{nmk} \sin (m-2k) \lambda].$$

Перейдем теперь от полиномов Гегенбауэра к присоединенным функциям Лежандра на основании известной связи между ними [5]:

$$(\sin \vartheta)^j C_{l-j}^l (\cos \vartheta) = \frac{1}{2^j (1/2)_j} P_l^j (\cos \vartheta).$$

Тогда после очевидных преобразований получим

$$V'' = f \operatorname{ctg} \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n N_{nm} P_{n+1}^{m+1} (\cos \vartheta) [\sum_{k=0}^m a_{nmk} \cos (m-2k) \lambda +$$

$$+ \sum_{k=0}^m b_{nmk} \sin (m-2k) \lambda],$$

где

$$N_{nm} = \frac{M_{nm}}{2^{m+1} (1/2)_{m+1}}. \quad (4)$$

Но одна из известных рекуррентных формул [1, 4] для присоединенных функций Лежандра с одинаковым нижним индексом

$$P_p^{q+2} (x) + 2(q+1) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_p^{q+1} (x) + (p-q)(p+q+1) P_p^q (x) = 0$$

позволяет записать  $\operatorname{ctg} \vartheta P_{n+1}^{m+1} (\cos \vartheta) = -\frac{(n-m+1)(n+m+2)}{2(m+1)} \times$

$$\times P_{n+1}^m (\cos \vartheta) - \frac{1}{2(m+1)} \cdot P_{n+1}^{m+2} (\cos \vartheta).$$

Используя эту формулу, имеем

$$V'' = V''(r, \vartheta, \lambda) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n \left( -\frac{N_{nm}}{2(m+1)} \right) [(n-m+1) \times$$

$$\times (n+m+2) P_{n+1}^m (\cos \vartheta) + P_{n+1}^{m+2} (\cos \vartheta)] \times$$

$$\times [\sum_{k=0}^m a_{nmk} \cos (m-2k) \lambda + \sum_{k=0}^m b_{nmk} \sin (m-2k) \lambda]. \quad (5)$$

Получив представление потенциала  $V''$  ДД, заметим, что его искомое разложение по шаровым функциям должно иметь вид  $V'' = \sum_{p=1}^{\infty} Y_p/r^{p+1}$ , где  $Y_p = Y_p(\theta, \lambda)$  — сферические функции  $p$ -го порядка.

В таком представлении  $V''$  (в отличие от разложений объемного потенциала и потенциала простого слоя, в которых суммирование начинается с  $p=0$ ) первым членом разложения является  $Y_1/r^2$ , что связано с поведением  $V''$  на бесконечности, где потенциал двойного слоя убывает пропорционально  $1/r^2$  [2]. Из уже полученного выражения  $V''$  в виде (5) видно, что оно удовлетворяет этому условию.

Значит, входящие в (5) суммы  $f_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (\dots) [\dots] [\dots]$  должны

быть сферическими функциями  $(n+1)$ -го порядка. Не постулируя этого разложим каждую из этих сумм по элементарным сферическим гармоникам, что, с одной стороны, подтвердит это положение, а с другой — даст явное выражение указанных функций, чем и будет завершено получение искомого разложения потенциала  $V''$  по шаровым функциям.

При разложении  $f_n = f_n(\theta, \lambda)$  по элементарным сферическим функциям получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i (\alpha_{ij} \cos j\lambda + \beta_{ij} \sin j\lambda) P_i^j(\cos \theta) = Y_{n+1}(\theta, \lambda),$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \end{array} \right\} = \frac{2i+1}{2\pi} \int_{\sigma} f_n(\theta, \lambda) P_i^j(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos j\lambda \\ \sin j\lambda \end{array} \right\} d\sigma;$$

$$\alpha_{i0} = \frac{2i+1}{4\pi} \int_{\sigma} f_n(\theta, \lambda) P_i(\cos \theta) d\sigma; \quad \beta_{i0} = 0.$$

При вычислении коэффициентов  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  видно, что за счет ортогональности сферических функций на единичной сфере все равны нулю, кроме

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{i=n+1, j=m} \\ \beta_{i=n+1, j=m} \end{array} \right\} = \frac{2n+3}{2\pi} \int_{\sigma} \left( -\frac{N_{nm}}{2(m+1)} \right) (n-m+1)(n+m+2) \times$$

$$\times [P_{n+1}^m(\cos \theta)]^2 \left\{ \begin{array}{l} a_{nm0} (\cos m\lambda)^2 \\ b_{nm0} (\sin m\lambda)^2 \end{array} \right\} \cdot d\sigma; \quad \alpha_{i=n+1, 0} =$$

$$= \frac{2n+3}{4\pi} \int_{\sigma} \left( -\frac{N_{n0}}{2} \right) (n+1)(n+2) [P_{n+1}(\cos \theta)]^2 a_{n00} d\sigma.$$

Откуда

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{n+1, m} \\ \beta_{n+1, m} \end{array} \right\} = K_{n, m} \left\{ \begin{array}{l} a_{nm} \\ b_{nm} \end{array} \right.$$

при

$$K_{nm} = \left( -\frac{N_{nm}}{2(m+1)} \right) \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!}.$$

Таким образом, получено

$$Y_{n+1}(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n+1} K_{nm} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1}^m(\cos \vartheta),$$

где

$$\left. \begin{array}{l} a_{nm} = f a_{nm0} \\ b_{nm} = f b_{nm0} \end{array} \right\} = f \int_s^r v(r', \lambda') r'^n \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right. dS \quad (6)$$

и

$$K_{nm} = -\frac{(n+m+2)!}{2(1/2)_{m+1}(2)_{n+m+1}} \left[ \left( \frac{3}{2} \right)_m \right]^2 C_{n-m}^{\frac{1}{2}+m}(0).$$

Заметим, что выполненный расчет аннулировал отдельное выделение вычисления  $\alpha_{n+1, 0}$ , и коэффициенты  $a_{n0}$  определяются первой формулой (6) с учетом  $K_{n0}$  по последней из приведенных формул при  $m=0$ .

Перед тем как подставлять полученное выражение сферических функций  $Y_{n+1}$  в разложение (5) вспомним формулы (3), (4), за счет которых ряд членов этого разложения обратится в ноль. В искомом ряду будут отсутствовать все члены, содержащие  $K_{nm}$ , в которых фигурируют  $C_{n-m}^{\frac{1}{2}+m}(0)$  при нечетных разностях индексов  $(n-m)$ . По этой причине, в частности, разложение  $V''$  не будет содержать секториальных гармоник (ибо  $K_{n,n+1}=0$ ), поэтому исследуемое представление потенциала ДД можно записать в виде

$$V''(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n K_{nm} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1}^m(\cos \vartheta), \quad (7)$$

где после ряда упрощений

$$K_{nm} = (-1)^{\frac{n-m}{2}+1} \left( \frac{1}{((n-m)/2)!} \right) ! \left( \frac{3}{2} \right)_m \left( \frac{3}{2} \right)_{\frac{n-m}{2}}. \quad (8)$$

Коэффициенты ряда (7), даваемые формулами (6) и зависящие от структуры двойного слоя (от его плотности  $v$ ), аналогичны по своему значению стоксовым постоянным в ряде для объемного потенциала  $V$ . Формула (7) является окончательной: она дает искомое разложение потенциала  $V''$  двойного слоя, расположенного

женного в плоскости экватора в области  $S$ , с произвольной плотностью  $v$ , причем в этом разложении должны быть опущены члены, разность индексов  $n$  и  $m$  в которых нечетна.

В начале статьи отмечалось, что потенциал  $V''$  тождествен нечетной части  $V_{\text{неч}}$  потенциала  $V$  планеты. Поэтому, сохраняя за символами  $n$  и  $m$  роль индексов в коэффициентах (6) ряда (7) и сравнивая последний с нечетной частью традиционного ряда потенциала  $V$  планеты, получаем

$$\left. \begin{array}{l} a_{nm} \\ b_{nm} \end{array} \right\} = \frac{fMR^{n+1}}{K_{nm}} \left\{ \begin{array}{l} C_{n+1, m}, \\ S_{n+1, m}, \end{array} \right. \quad (9)$$

где  $C_{\alpha\beta}$ ,  $S_{\alpha\beta}$  — ее безразмерные стоксовые постоянные. Значит, коэффициенты  $a_{nm}$ ,  $b_{nm}$  ряда (7) — это соответствующие им по (9) разные стоксовые постоянные планеты, поделенные на величину  $K_{nm}$  из выражения (8).

При заданном внешнем потенциале планеты  $V$  полученное здесь разложение потенциала  $V'' = V_{\text{неч}}$  с коэффициентами (6) позволяет теперь найти степенные моменты плотности  $v$  дипольного диска ПД, а по ним и саму плотность  $v$ . Это вместе с решением аналогичной задачи для материального диска МД, с одной стороны, приводит к завершению построения конструкции гравитирующих дисков, создающих во внешнем (относительно планеты) пространстве ее поле притяжения, а с другой — раскрывает новые возможности создания моделей гравитационного потенциала планет, в частности многоточечных.

**Список литературы:** 1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965—1974. 2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 3. Мещеряков Г. А. О представлении потенциала планет суммой потенциалов плоских слоев. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 40. 4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 5. Уиттлер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1963.