

Откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1, m} \\ b_{n+1, m} \end{array} \right\} = K_{n, m} \left\{ \begin{array}{l} a_{nm} \\ b_{nm} \end{array} \right\}$$

при

$$K_{nm} = \left(-\frac{N_{nm}}{2(m+1)} \right) \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!}.$$

Таким образом, получено

$$Y_{n+1}(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n+1} K_{nm} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1}^m(\cos \vartheta),$$

где

$$\left. \begin{array}{l} a_{nm} = f a_{nm0} \\ b_{nm} = f b_{nm0} \end{array} \right\} = f \int_s^r v(r', \lambda') r'^m \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\} dS$$

$$K_{nm} = -\frac{(n+m+2)!}{2(1/2)_{m+1}(2)_{n+m+1}} \left[\left(\frac{3}{2} \right)_m^2 \right] C_{n-m}^{3+m}(0).$$

Заметим, что выполненный расчет аннулировал отдельное выделение вычисления $a_{n+1, 0}$, и коэффициенты a_{n0} определяются первою формулой (6) с учетом K_{nm} по последней из приведенных формул при $m=0$.

Перед тем как подставлять полученное выражение сферических функций Y_{n+1} в разложение (5) вспомним формулы (3), (4), за счет которых ряд членов этого разложения обратится в ноль. В исскомом ряду будут отсутствовать все члены, содержащие K_{nm} , в которых фигурируют $C_{n-m}^{3+m}(0)$ при нечетных разностях индексов ($n-m$). По этой причине, в частности, разложение V'' не будет содержать секториальных гармоник (ибо $K_{n,n+1}=0$), поэтому исходное представление потенциала ДД можно записать в виде

$$V''(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n K_{nm} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1}^m(\cos \vartheta),$$

где после ряда упрощений

$$K_{nm} = (-1)^{\frac{n-m}{2}+1} \left(\frac{((n-m)/2)!}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \right)_m^{\frac{n-m}{2}}. \quad (7)$$

Коэффициенты ряда (7), даваемые формулами (6) и зависящие от структуры двойного слоя (от его плотности v), аналогичны по своему значению стоксовым постоянным в ряде для объемного потенциала V . Формула (7) является окончательной: она дает исключительное разложение потенциала V'' двойного слоя, расположенного в плоскости экватора в области S , с произвольной плотностью v , причем в этом разложении должны быть опущены члены, разность индексов n и m в которых нечетна.

В начале статьи отмечалось, что потенциал V'' тождествен нечетной части $V_{\text{неч}}$ потенциала V планеты. Поэтому, сохранив за символами n и m роль индексов в коэффициентах (6) ряда (7) и сравнивая последний с нечетной частью традиционного ряда потенциала V планеты, получаем

$$\left. \begin{array}{l} a_{nm} \\ b_{nm} \end{array} \right\} = \frac{f M R^{n+1}}{K_{nm}} \left\{ \begin{array}{l} C_{n+1, m}, \\ S_{n+1, m}, \end{array} \right\} \quad (9)$$

где C_{ab} , S_{ab} — ее бе з р а з м е р н ы е стоксова постоянные. Значит, коэффициенты a_{nm} , b_{nm} ряда (7) — это соответствующие им по (9) размерные стоксовые постоянные планеты, поделенные на величину K_{nm} из выражения (8).

При заданном внешнем потенциале планеты V полученное здесь разложение потенциала $V''=V_{\text{неч}}$ с коэффициентами (6) позволяет теперь найти степени моменты плотности v дипольного диска ДД, а по nim и саму плотность v . Это вместе с решением аналогичной задачи для материального диска МД, с одной стороны, приводит к завершению построения конструкции гравитирующих дисков, создающих во внешнем (относительно планеты) пространстве ее поле притяжения, а с другой — раскрывает новые возможности создания моделей гравитационного потенциала планет, в частности многоточечных.

Список литературы: 1. Бейтмен Г., Эрёги А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965—1974. 2. Владышев В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 3. Мещеряков Г. А. О представлении потенциала планеты суммой потенциалов плоских слоев. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 40. 4. Ромзик И. М., Грабитайн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Л.: ГИИЛ, 1951. 5. Уиттингтон Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматиз, 1963.

Статья поступила в редакцию 14.01.84

УДК 551.24:528.2/3

Е. А. МИНИН

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Исходя из современных концепций возникновения вертикальных движений земной коры, предположим, что модель движения, являясь в общем случае аддитивной нестационарной случайной функцией, состоит из детерминированной и случайной частей. Причем первая, в свою очередь, представлена суперпозицией периоди-

ческих колебаний, а вторая — стационарной случайной функцией

и чисто случайной составляющей.

Ввиду отсутствия достаточного количества данных о движении земной коры во времени рассмотрим ее динамику в пространстве, заменив двухмерный спектральный анализ одномерным и считая случайные движения функциями расстояния, т. е.

$$K(d) = \sum \sin(a_j d) + \Phi(d) + \varepsilon \dots, \quad (1)$$

где $\Phi(d)$ и ε обусловлены случайными нетектоническими изменениями высот реперов и ошибками нивелирования.

Спектральная плотность периодического колебания, вычисленная по конечному интервалу изменения его аргумента, будет иметь ограниченные пики на дискретных частотах ω_n , равных основным частотам процесса. Поскольку в (1) на периодическую функцию накладывается непериодическая случайная функция, пики спектральной плотности могут появиться на частоте, отличной от частоты периодического колебания и, следовательно, не будут надежной оценкой истинного спектра.

Для устранения подобного недостатка применяют различные весовые функции для сглаживания спектра. В этом случае возможные отклонения оценки спектра от положения истинного пика на оси частот характеризуются интервалом разрешения $\Delta\omega$, который для сглаженной оценки равен $1/\tau_0$, где τ_0 — длина взвешивающего окна [3].

В настоящей работе применяли весовую функцию Парзена [1] и для вычисления сглаженной оценки спектра использовали формулу

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \{ \lambda_0 C_0 + 2 \sum_{k=1}^m \lambda_k C_k \cos \omega_j K \}, \quad (2)$$

где $\omega_j = \pi j / m$; $j = 0, 1, \dots, m$; λ_k — весовая функция, вычисленная по формуле

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - \frac{6K^2}{m^2} \left(1 - \frac{K}{m}\right), & 0 \leq K \leq m/2, \\ 2 \left(1 - \frac{K}{m}\right)^3, & m/2 \leq K \leq m, \end{cases} \quad (3)$$

а C_k — коэффициент автокорреляции, вычисленный по формуле

$$C_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} K_i K_{i+k} \dots. \quad (4)$$

Исследовались движения земной коры по четырем линиям нивелирования I и II классов, выполненного ГУГК при СМ СССР в 1924—1976 годах.

Линии проходят по Восточно-Европейской платформе, причем две из них примерно в меридиональном и две в широтном направ-

лениях. Характеристика линий дана в таблице, а изменения в высотном положении реперов по трассе нивелирования за 20—40-летний период показаны на рис. 1.

На рис. 1 движения земной коры даны относительно начала линий после исключения линейной интерполяцией по способу наи-

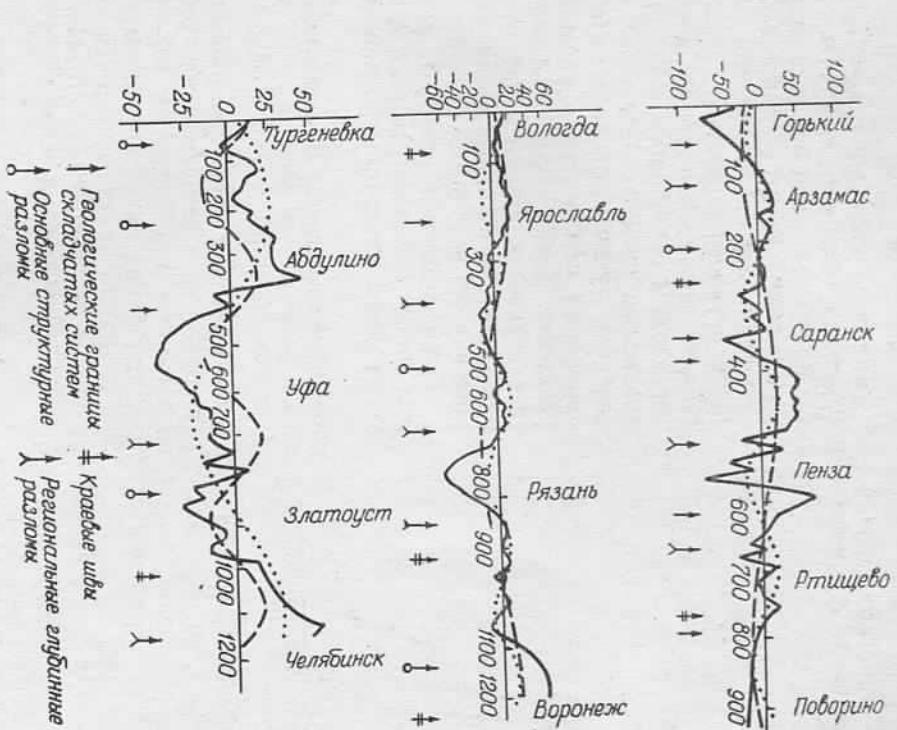


Рис. 1. Движение земной коры по линиям нивелирования I—III.

меньших квадратов низкочастотной составляющей, период которой считался гораздо большим длины линий.

С учетом дискретности наблюдаемых значений, а также неравномерности расположения реперов на линиях верхняя частота анализа была ограничена частотой наложения (Найквиста): $\omega_n = \pi / \Delta d$, где Δd — минимальное расстояние между двумя смежными реперами.

Для более точного определения частоты колебания длину взвешивающего окна выбирали возможно большей за счет увеличения случайной ошибки в интенсивности колебаний. Из-за этого ампли-

тулы колебаний определяли не по спектру, а по найденной частоте способом наименьших квадратов [3].

$$\Phi = \arctg \left(-\frac{[K_i \cos \varepsilon_i]}{[K_i \sin \varepsilon_i]} \right), \quad (5)$$

$$A = 2 |K_i \sin \varepsilon_i| / n \cos \Phi,$$

где Φ — значение функции в дискретных точках $i=1, 2, \dots, n$.

Кроме того, для более детальной прорисовки спектра, наблюденные значения движения земной коры были стущены в местах, где расстояния между реперами (следствие утраты последних) значительно превысили среднее. Стущение произведено путем линейного интерполяции между двумя смежными реперами. Таким образом, в результате стущения среднее расстояние между точками наблюдения было доведено до 8...9 км.

Нормированные спектры исходных линий показаны на рис. 2, там же указаны интервалы разрешений.

Рис. 2. Нормированные спектры исходных линий:

- — — I;
- — II;
- — III;
- — IV.

По найденной частоте и по (5) вычисляли остальные параметры синусоиды, которую затем исключали из первоначального ряда. Остаток снова подвергал спектральному анализу, а по (2)–(4) и по вновь установленной частоте колебания находили параметры следующей синусоиды и т. д. Эти операции повторяли до тех пор, пока амплитуда выделенной синусоиды не становилась по величине одного порядка со средним квадратическим значением случайной части ряда.

В результате установлены синусоидальные составляющие модель (1), описывающие тектонические волны, периоды колебаний которых и амплитуды приведены в таблице.

Как показали дальнейшие исследования, оставшуюся стационарную случайную часть можно аппроксимировать линейным авторегрессионным рядом вида

$$K_i + b_1 K_{i-1} + b_2 K_{i-2} = \varepsilon_i, \quad (6)$$

где ε_i — случайная величина.

Параметры этого ряда, вычисленные через первые две автокорреляции по формулам $b_1 = -r_1(1-r_2)/(1-r_1^2)$, $b_2 = -(r_2-r_1^2)/(1-r_1^2)$, приведены в таблице. Здесь же указаны средние квадратичные значения случайной величины ε .

Номер линий	Название линии	Год инвентаризации		Расстояние между меридианами, км	Амплитуда, мм	Ско-дикже-стость, м/год		
		1 цикл	2 цикл			среднее	среднее	
I	Горький—Поворино	I 1924—1929	II 1970—1976	900 5,7	16,6	$b_1 = -0,47$ $b_2 = 0,10$	0,4 2,0	0,94
II	Вологда—Воронеж	I 1949—1952	II 1972—1976	1198 5,4	11,3	$b_1 = -0,66$ $b_2 = -0,10$	0,8 2,5	0,55
III	Куйбышев—Челябинск	I 1927—1942	II 1957	1155 4,9	10,3	$b_1 = -0,73$ $b_2 = 0,08$	1,1 2,2	0,70
V	Куровское—Пильна	I 1926—1929	II 1961—1972	507 4,7	11,8	$b_1 = -0,68$ $b_2 = 0,28$	3,0 8,0	1,60

Периоды выделенных тектонических волн представлены в той или иной степени по каждой линии, начиная со 126 км. Тектонические волны с периодом колебания менее 100 км в спектре не выделяются, поскольку, с одной стороны, значения их амплитуд одного порядка или даже менее случайной части ряда, а, с другой — разрешающая способность спектра очень невелика.

На рис. 1 показаны две первые синусоиды с наибольшими амплитудами и соответствующие разломы фундамента Восточно-Европейской платформы. Как видим, глубинные разломы фундамента платформы в основном совпадают с местами, где движение земной коры меняет знак, т. е. приурочено к местам наибольших напряжений. Это говорит о том, что современные движения земной коры контролируются докембрийскими разломами и являются унаследованными.

Скорости движения по всем линиям, определенные относительно средней плоскости, характерны для платформенных областей и не превышают 2...2,5 мм в год. Исключение составляет линия IV, где скорость движения в четыре раза выше, поэтому остановимся на этой линии несколько подробнее.

На рис. 3 показаны исходное движение земной коры по линии IV примерно за последние сорок лет, а также выделенные тектонические волны. Как видим, наибольшее по абсолютной величине движение положительное и приходится на район Муром—Арзамас. Линия пересекает с запада на восток Токмовскую систему сдвиговых поднятий, входящую в состав Волжско-Камской антикли-

зы. Эта региональная тектоническая структура хорошо описывается синусоидой с периодом 500 км и контролируется двумя разломами кристаллического фундамента, появившимися, как предполагают, в рифе районе Мурома и Пильны.

В тектоническом отношении в пределах Токмовской системы дислокаций выделяют Окско-Мокшинскую зону и другие, граничные которых показаны на рис. 3.

Основные структурные элементы района, развившиеся в палеозое и мезозое и оформившиеся в неогене, продолжают свое

развитие и в четвертичное время, причем отмечается, что в настоящее время Шарголинская зона поднятий испытывает резкий подъем, что подтверждается увеличением скорости движения земной коры в этом районе.

Заметное увеличение скорости движения к востоку от границы, отделяющей Ардатовско-Шарголинскую зону от Окско-Мок-

шинской депрессионной зоны, вызвано сложением разнорядковых тектонических волн. По-видимому, вдоль этой границы должен находиться разлом.

Разложение высот, определенных по линии IV, на синусоидальную составляющую показывает, что тектонические структуры, описываемые колебанием с периодом 270 км, слабо выражены в современном рельфе, тогда как структуры, описываемые колебаниями с периодами 500, 200 и 140 км, выражены в рельфе наиболее ярко. Если учесть, что амплитуда тектонической волны с периодом 270 км наибольшая, можно предположить, что колебания с этим периодом относительно поздние.

В последней колонке таблицы приведено значение μ , показывающее, какая часть случайной величины ε приходится на один километр линии.

Как видно из таблицы, максимальное значение μ получено на линии IV, в которой наблюдения одного цикла наиболее растянуты во времени (второй цикл выполнялся в течение 11 лет), приняв во внимание значительные скорости движения земной коры в этом районе, это нужно учитывать при уравнивании нивелирования. Вообще же μ , по нашему мнению, отражает в какой-то степени точность нивелирования, во всяком случае, значение ε , полученное из (6), сравнимо с невязками нивелирных ходов.

Таким образом, спектральный анализ помогает выяснить внутреннюю структуру процесса движения земной коры и заслуживает более широкого применения в практике. Предложенная методика позволяет отделить тектонические колебания от случайных. Разложение движения земной коры на отдельные тектонические волны можно использовать для уточнения границ тектонических структур при геологической съемке.

Для изучения короткопериодических по времени и по размерам колебаний земной коры, вызванных [5] влиянием суммы внешних факторов, периоды наблюдения должны быть менее 20 лет. Кроме того, значительное сокращение периметров ходов высокоточного нивелирования и сокращение расстояния между реперами до 3...5 км в пределах существующих геодинамических полигонов позволяет уменьшить количество ошибок нивелирования и повысить частоту спектрального анализа.

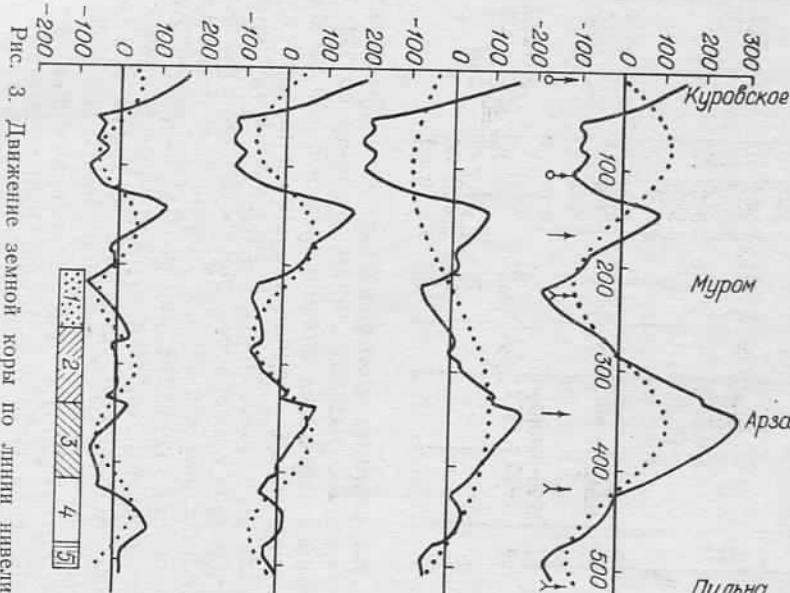


Рис. 3. Движение земной коры по линии нивелирования IV:

- 1 — Окско-Мокшинская депрессионная зона; 2 — Ардатовско-Шарголинская структурно-эрозионная зона поднятий; 3 — Бобровско-Бугульминско-Актурукский прогиб, разделенные Первовским поднятием; 4 — Спасское-Вадимовское валообразование; 5 — Михайловско-Бартсурианская флексура.

развитие и в четвертичное время, причем отмечается, что в настое-

щее время Шарголинская зона поднятий испытывает резкий подъем, что подтверждается увеличением скорости движения земной коры в этом районе.

Заметное увеличение скорости движения к востоку от границы, отделяющей Ардатовско-Шарголинскую зону от Окско-Мок-