ДИСКУССИИ И РЕЦЕНЗИИ

УДК 519.240

Л. С. ХИЖАК

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ *

Идея метода предусматривает получение целого ряда числовых характеристик, необходимых для одновременного решения задач математической статистики, возникающих при проведении исследований над результатами наблюдений.

Предположим, что исследуемая величина является неизвестной функцией $f(\nu, \tau)$ двух параметров ν и τ. Пусть далее в результате эксперимента получены измеренные значения функции $f(\nu_i, \tau_j)$ для различных значений параметров ν и τ, где $i=1, 2, \ldots, m$ и $j=1, 2, 3, \ldots, k$. Обозначим эти значения функции через l_{ij}, то есть $f(\nu_i, \tau_j)=l_{ij}$.

Тогда совокупность всех измерений исследуемой величины можно представить в виде матрицы

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \cdots l_{1k} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \cdots l_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} \cdots l_{mk} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Назовем строчки матрицы (1) реализациями нашей функции по ν, а столбцы — реализациями по τ. Матрицу L назовем матрицей результатов измерений. Зная элементы матрицы L, можно дать ответ на ряд вопросов, возникающих при исследовании интересующей нас величины (например, установление корреляционной зависимости как между столбцами, так и между строками матрицы (1), выявление различий между реализациями по ν, а также τ, подбор наиболее подходящей кривой, аппроксимирующей все результаты или отдельные реализации с последующей их оценкой и др.).

Для комплексного решения этих вопросов аппроксимируем в первую очередь каждую реализацию по ν полиномом $(n-1)$-й степени, причем $n<k$. Тогда можно записать

$$L=A\bar{\tau}+A_0+B, \tag{2}$$

$$\bar{\tau}=\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots \tau_k \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & \cdots \tau_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_1^{n-1} & \tau_2^{n-1} & \cdots \tau_k^{n-1} \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{(n-1)1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{(n-1)2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} \cdots a_{(n-1)m} \end{pmatrix};$$

* Данная статья, как и статьи Л. С. Хижака, П. Г. Черняги «Разработка некоторых вопросов комплексного метода исследования результатов наблюдений», П. Г. Черняги «Оценка точности неизвестных в комплексном методе исследования результатов наблюдений», публикуются здесь в порядке обсуждения. (*Примечание редколлегии*).

$$A_0^{m\times k}=\begin{pmatrix} a_{01} & a_{01}\cdots a_{01}\\ a_{02} & a_{02}\cdots a_{02}\\ \vdots & \vdots\\ a_{0m} & a_{0m}\cdots a_{0m}\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\cdots\beta_{1k}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\cdots\beta_{2k}\\ \vdots & \vdots\\ \beta_{m1} & \beta_{m2}\cdots\beta_{mk}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Образуем дальше для матрицы L матрицу $\overline{K}$, которую можем записать в таком виде:

$$\overline{K}=L'L, \tag{4}$$

где L' — транспонированная матрица матрицы L. Учитывая выражения (2) и (4), получаем

$$\overline{K}=(A\bar{\tau}+A_0+B)'(A\bar{\tau}+A_0+B). \tag{5}$$

Элементы в строчках матрицы B являются отклонениями результатов измерений от аппроксимирующих полиномов. Разделяя левую и правую части равенств (5) на m и выражая суммы через соответствующие математические ожидания и дисперсии или математические ожидания и корреляционные моменты (под математическим ожиданием, дисперсией и корреляционным моментом мы понимаем их статистические аналогии), нетрудно показать что система (5) образует две независимые системы:

$$K_{M_l}=\frac{1}{k}(M_A\bar{\tau}+M_{A_0}+M_B)'(M_A\bar{\tau}+M_{A_0}+M_B); \tag{6}$$

$$K_{D_l}=\frac{1}{m}(A\bar{\tau}+A_0+B)'(A\bar{\tau}+A_0+B)-$$

$$-\frac{1}{k}(M_A\bar{\tau}+M_{A_0}+M_B)'(M_A\bar{\tau}+M_{A_0}+M_B), \tag{7}$$

где

$$K_{M_l}=\begin{pmatrix} m_{l_1}^2 & m_{l_1}m_{l_2}\cdots m_{l_1}m_{l_k}\\ & m_{l_2}^2,\cdots,m_{l_2}m_{l_k}\\ \vdots & \vdots\\ & m_{l_k}^2\end{pmatrix};$$

$$K_{D_l}=\begin{pmatrix} D_{l_1} & K_{l_1l_2},\cdots,K_{l_1l_k}\\ & D_{l_2},\cdots,K_{l_2l_k}\\ \vdots & \vdots\\ & D_{l_k}\end{pmatrix},\quad M_A^{k\times(n-1)}=\begin{pmatrix} m_{a_1} & m_{a_2},\cdots,m_{a_{n-1}}\\ m_{a_1} & m_{a_2},\cdots,m_{a_{n-1}}\\ \vdots & \vdots\\ m_{a_1} & m_{a_2},\cdots,m_{a_{n-1}}\end{pmatrix};$$

$$M_{A_0}^{k\times k}=\begin{pmatrix} m_{a_0} & m_{a_0},\cdots,m_{a_0}\\ m_{a_0} & m_{a_0},\cdots,m_{a_0}\\ \vdots & \vdots\\ m_{a_0} & m_{a_0},\cdots,m_{a_0}\end{pmatrix};\quad M_B^{k\times(n-1)}=\begin{pmatrix} m_{\beta_1} & m_{\beta_2},\cdots,m_{\beta_k}\\ m_{\beta_1} & m_{\beta_2},\cdots,m_{\beta_k}\\ \vdots & \vdots\\ m_{\beta_1} & m_{\beta_2},\cdots,m_{\beta_k}\end{pmatrix},$$

здесь буквами m, D и K обозначены математические ожидания, дисперсии и корреляционные моменты соответствующих величин, указанных индексами и вычисленных для столбцов матрицы (1).

Неизвестными в системе, представленной уравнением (6), будут квадраты математических ожиданий коэффициентов аппроксимирующего полинома и отклонений β, а также все попарные произведения этих математических ожиданий.

Неизвестными в системе, представленной уравнением (7), будут дисперсии коэффициентов аппроксимирующего полинома, дисперисии отклонений β, а также все корреляционные моменты.

Свободными членами систем (6) и (7) будут элементы матриц K_{M_l} и K_{D_l}. Следовательно, количество уравнений в системах (6) и (7) равно количеству элементов матрицы K.

Очевидно, количество неизвестных в системах (6) и (7) больше количества уравнений, поэтому системы имеют бесконечное множество решений. Для достижения однозначности решения эти системы необходимо решать при определенных условиях, зависящих в свою очередь от условий, под которыми производилось аппроксимирование результатов измерений полиномом.

Уравнения (6) и (7) составлены для случая, когда аппроксимировались полиномом $(n-1)$-й степени реализации по ν. Аналогичные уравнения можно составить для реализаций по τ.

Таким образом, решая эти уравнения с условием, вытекающим из условий аппроксимации, получаем все необходимые исходные данные для решения целого ряда задач математической статистики.

Работа поступила в редколлегию 26 сентября 1972 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.