

УДК 519.240

Л. С. ХИЖАК, П. Г. ЧЕРНЯГА

РАЗРАБОТКА НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ КОМПЛЕКСНОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Как показано в работе [1], сущность комплексного метода исследования результатов наблюдений заключается в решении систем:

$$K_{M_l} = \frac{1}{k} (M_A \bar{\tau} + M_{A_0} + M_B)' (M_A \bar{\tau} + M_{A_0} + M_B); \quad (1)$$

$$K_{D_L} = \frac{1}{m} (A\bar{\tau} + A_0 + B)' (A\bar{\tau} + A_0 + B) - \\ - \frac{1}{k} (M_A \bar{\tau} + M_{A_0} + M_B)' (M_A \bar{\tau} + M_{A_0} + M_B), \quad (2)$$

при условиях, вытекающих из условий аппроксимации полиномом $(n-1)$ -й степени отдельных реализаций по данному параметру.

В статье мы рассматриваем вопрос о том, какими могут быть условия, позволяющие получить единственное решение систем (1) и (2), если аппроксимация проводилась при условии, что

$$\sum_{i=1}^k \beta_i^2 = \min, \quad (3)$$

для каждой реализации в отдельности, где k — количество результатов наблюдений данной реализации.

Как известно, при определении коэффициентов полинома по методу наименьших квадратов, то есть при условии (3), приходим к так называемым нормальным уравнениям. Следовательно, условиями при решении систем (1) и (2) могут быть видоизмененные каким-то образом нормальные уравнения. Здесь мы не останавливаемся на строгом доказательстве существования единственности и устойчивости решения систем уравнений (1) и (2) при условии (3), а покажем, как можно решать данную задачу.

Решая уравнения (1) и (2), получаем следующие системы уравнений:

$$m_{l_k}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_k^{2i} m_{a_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tau_k^i m_{a_0} m_{a_i} + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \tau_k^{i+1} m_{a_1} m_{a_i} + \dots + 2 \sum_{i=3}^{n-1} \tau_k^{i+2} m_{a_2} m_{a_i} + \dots + 2 \tau^{2n-3} m_{a_{n-2}} m_{a_{n-1}} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \tau_k^i m_{a_i} m_{\beta_k} + m_{\beta_k}^2; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
m_{l_{k-r}} m_{l_k} &= \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{k-r}^i \tau_k^i m_{a_l} + \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_{k-r}^i + \tau_k^i) m_{a_0} m_{a_i} + \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1} (\tau_{k-r} \tau_k^i + \tau_k \tau_{k-r}^i) m_{a_1} m_{a_l} + \sum_{i=3}^{n-1} (\tau_{k-r}^i \tau_k^{i-1} + \tau_{k-r}^{i-1} \tau_k^i) m_{a_2} m_{a_l} + \\
&+ \sum_{i=4}^{n-1} (\tau_{k-r}^i \tau_k^{i-1} + \tau_{k-r}^{i-1} \tau_k^i) m_{a_3} m_{a_l} + \cdots + (\tau_{k-r}^{n-1} \tau_k^{n-2} + \tau_k^{n-1} \tau_{k-r}^{n-2}) \times \\
&\times m_{a_{n-2}} m_{a_{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-1} \tau_k^i m_{a_l} m_{\beta_{k-r}} + \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{k-r}^i m_{a_l} m_{\beta_k} + m_{\beta_k} m_{\beta_{k-r}}; \\
D_{l_k} &= \sum_{i=0}^{n-1} \tau_k^{2i} D_{a_l} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tau_k^i K_{a_0 a_l} + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \tau_k^{i+1} K_{a_1 a_l} + 2 \sum_{i=3}^{n-1} \tau_k^{i+2} K_{a_2 a_l} + \\
&+ \cdots + 2 \tau^{2n-3} K_{a_{n-2} a_{n-1}} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \tau_k^i K_{a_1 \beta_k} + D_{\beta_k}; \\
K_{l_{k-r} l_k} &= \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{k-r}^i \tau_k^i D_{a_l} + \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_{k-r}^i + \tau_k^i) K_{a_0 a_l} + \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1} (\tau_{k-r} \tau_k^i + \tau_k \tau_{k-r}^i) K_{a_1 a_l} + \sum_{i=3}^{n-1} (\tau_{k-r}^i \tau_k^{i-1} + \tau_{k-r}^{i-1} \tau_k^i) K_{a_2 a_l} + \\
&+ \sum_{i=4}^{n-1} (\tau_{k-r}^i \tau_k^{i-1} + \tau_{k-r}^{i-1} \tau_k^i) K_{a_3 a_l} + \cdots + (\tau_{k-r}^{n-1} \tau_k^{n-2} + \tau_k^{n-1} \tau_{k-r}^{n-2}) K_{a_{n-2} a_{n-1}} + \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \tau_k^i K_{a_l \beta_{k-r}} + \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{k-r}^i K_{a_l \beta_k} + K_{\beta_k \beta_{k-r}}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Преобразованные нормальные уравнения, которые являются дополнительными условиями для решения систем, записываем:

для системы (1)

$$\begin{aligned} \text{I rp. } 1) \sum_{i=1}^k m_{\beta_i} m_{a_0} &= \sum_{i=1}^k m_{\beta_i} m_{a_1} = \dots = \sum_{i=1}^k m_{\beta_i} m_{a_{n-1}} = 0; \\ 2) \sum_{i=1}^k \tau_i m_{\beta_i} m_{a_0} &= \sum_{i=1}^k \tau_i m_{\beta_i} m_{a_1} = \dots = \sum_{i=1}^k \tau_i m_{\beta_i} m_{a_{n-1}} = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$n) \sum_{l=1}^k \tau_i^{n-1} m_{\beta_l} m_{a_0} \sum_{l=1}^k \tau_i^{n-1} m_{\beta_l} m_{a_i} = \dots = \sum_{l=1}^k \tau_i^{n-1} m_{\beta_l} m_{a_{n-1}} = 0;$$

II gp.

$$1) \sum_{i=1}^k m_{\beta_i} m_{\beta_i} = \sum_{i=1}^k m_{\beta_i} m_{\beta_i} = \dots = \sum_{i=1}^k m_{\beta_i} m_{\beta_i} = 0;$$

$$2) \sum_{l=1}^{i-1} \tau_i m_{\beta_l} m_{\beta_1} = \sum_{l=1}^k \tau_i m_{\beta_l} m_{\beta_2} = \dots = \sum_{l=1}^k \tau_i m_{\beta_l} m_{\beta_k} = 0;$$

$$n) \sum_{l=1}^k \tau_i^{n-1} m_{\beta_l} m_{\beta_1} = \sum_{l=1}^k \tau_i^{n-1} m_{\beta_l} m_{\beta_2} = \cdots = \sum_{l=1}^k \tau_i^{n-1} m_{\beta_l} m_{\beta_k} = 0;$$

для системы (2)

$$\text{I rp. 1)} \sum_{i=1}^k K_{\beta_i a_0} = \sum_{i=1}^k K_{\beta_i a_i} = \dots = \sum_{i=1}^k K_{\beta_i a_{n-1}} = 0;$$

$$2) \sum_{i=1}^k \tau_i K_{\beta_i a_0} = \sum_{i=1}^k \tau_i K_{\beta_i a_i} = \dots = \sum_{i=1}^k \tau_i K_{\beta_i a_{n-1}} = 0; \quad (7)$$

$$n) \sum_{i=1}^k \tau_i^{n-1} K_{\beta_i} a_0 = \sum_{i=1}^k \tau_i^{n-1} K_{\beta_i} a_i = \dots = \sum_{i=1}^k \tau_i^{n-1} K_{\beta_i} a_{n-1} = 0;$$

II гр.

$$(1) D_{\beta_1} + \sum_{i=2}^k K_{\beta_i \beta_1} = D_{\beta_2} + \sum_{i=2}^k K_{\beta_i \beta_2} = \cdots = D_{\beta_k} + \sum_{i=2}^k K_{\beta_i \beta_k} = 0;$$

$$2) \tau_1 D_{\beta_1} + \sum_{i=2}^k \tau_i K_{\beta_i \beta_1} = \tau_2 D_{\beta_2} + \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i K_{\beta_i \beta_2} = \dots = \\ = \tau_k D_{\beta_k} + \sum_{i=1}^k \tau_i K_{\beta_i \beta_k} = 0;$$

$$n) \quad \tau_1^{n-1} D_{\beta_1} + \sum_{i=2}^k \tau_i^{n-1} K_{\beta_i \beta_1} = \tau_2^{n-1} D_{\beta_2} + \sum_{i=1}^k \tau_i^{n-1} K_{\beta_i \beta_2} = \dots = \\ = \tau_k^{n-1} D_{\beta_k} + \sum_{i=1}^k \tau_i^{n-1} K_{\beta_i \beta_k} = 0.$$

Дополнительные уравнения можно разделить на две группы. В первую группу входят уравнения, содержащие в качестве неизвестных произведения математических ожиданий коэффициентов аппроксимирующего полинома и отклонений β для условий (6) и ковариационных моментов этих же величин для условий (7). Во вторую группу включаем уравнения, содержащие в качестве неизвестных произведения^u математических ожиданий отклонений β для условий (6) и дисперсии, а также ковариационные моменты отклонений β для условий (7). Для удобства дальнейших выкладок разобьем вторую группу на подгруппы от 1 до n . Таких подгрупп будет столько, сколько членов содержит аппроксимирующий полином.

Таким образом, для получения всех неизвестных достаточно совместно решить системы (4) и (6), а также системы (5) и (7).

Однако количество уравнений больше количества неизвестных. Причем количество уравнений зависит от количества членов аппроксимирующего полинома, а также от количества сечений *. От таких же факторов зависит и количество неизвестных, однако эта зависимость не одинакова. Таким образом, количество уравнений больше количества неизвестных, то есть появляются избыточные уравнения, которые зависят от количества членов полинома. Количество уравнений и неизвестных в зависимостях от n и k приведено в таблице. Следовательно, можно предположить, что некоторые из уравнений систем являются зависимыми.

Определением ранга систем на ЭЦВМ мы установили, что система будет иметь единственное решение, если исключить из второй группы

* Под сечением понимаем реализацию по τ [1].

избыточные уравнения. В зависимости от их количества они распределяются так на все $(n-1)$ подгруппы, что в каждой последующей избыточных будет на единицу меньше, чем в предыдущей. Подгруппы уравнений во второй группе можно записывать в любом порядке.

Зависимость количества избыточных уравнений от количества членов аппроксимирующего полинома

n	k	Уравнения ковариационной матрицы	Первая группа	Вторая группа	Всего уравнений	Неизвестные	Избыточные уравнения	Вторая разность
2	3	6	4	6	16	15	1	2
	4	10	4	8	22	21	1	
	5	15	4	10	29	28	1	
3	—	—	—	—	—	—	—	3
	4	10	9	12	31	28	3	
	5	15	9	15	39	36	3	
4	6	21	9	18	48	45	3	4
	—	—	—	—	—	—	—	
	5	15	16	20	51	45	6	
5	6	21	16	24	61	55	6	4
	—	—	—	—	—	—	—	
	6	21	25	30	76	66	10	

Так, например, если количество членов полинома 4, а сечений 5 (хотя избыточные уравнения не зависят от количества сечений), тогда, как видно из таблицы, количество избыточных уравнений будет 6, которые распределяются на возникающие в этом случае четыре подгруппы следующим образом; в одной из них избыточных уравнений 3, во второй — 2, в третьей — 1, а в четвертой — ни одного избыточного уравнения, причем это распределение не зависит от того, какую подгруппу считать первой, второй, третьей, четвертой.

Следовательно, системы уравнений, дающие однозначное решение нашей задачи должны быть составлены следующим образом: к уравнениям (4), (5) мы должны прибавить соответственно условия (6) и (7), предварительно исключив вышесказанным методом избыточные уравнения. Аналогично можно составить систему уравнений для реализации по τ .

Дополнительные уравнения, вытекающие из условий аппроксимации, можно представить еще в таком виде:

для системы (1)

$$\frac{1}{k} (\dot{\tau} M'_B) (M_A \bar{\tau} + M_{A_0} + M_B) = 0; \\ \frac{1}{k} (\dot{\tau} B'_B) (\dot{\tau} M'_B)' = 0; \quad (8)$$

для системы (2)

$$\frac{1}{m} (\dot{\tau} B') (A \bar{\tau} + A_0 + B) - \frac{1}{k} (\dot{\tau} M_B) (M_A \bar{\tau} + M_{A_0} + M_B) = 0; \\ \frac{1}{m} (\dot{\tau} B') (\dot{\tau} B')' - \frac{1}{k} (\dot{\tau} M'_B) (\dot{\tau} M'_B)' = 0, \quad (9)$$

где

$$\dot{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \dots & \tau_k \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & \tau_3^2 & \dots & \tau_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1^{n-1} & \tau_2^{n-1} & \tau_3^{n-1} & \dots & \tau_k^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Раскрывая совместно уравнения (1) и (8), (2) и (9), замечаем, что данные системы получаются в результате возвведения в квадрат уравнений аппроксимаций строчек матрицы L [1] под условием $\sum_{i=1}^k \beta_i^2 = \min$, а также их всевозможных произведений.

Поскольку неизвестными в уравнениях (1), (4), (6) или (1) и (8) являются квадраты математических ожиданий коэффициентов аппроксимирующего полинома и отклонений β , а также их попарные произведения, то возникает вопрос об однозначности математических ожиданий коэффициентов и отклонений β . Знак их (плюс или минус) легко устанавливается. Он зависит от знака m_{1k} , причем

$$m_{1k} = \frac{l_{1k} + l_{2k} + \dots + l_{mk}}{m},$$

и от знаков попарных произведений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хижак Л. С. Комплексный метод исследования результатов наблюдений. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 20.

Работа поступила в редакцию 26 сентября 1972 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.

Этот отрывок из статьи Л. С. Хижака о комплексном методе исследования результатов наблюдений опубликован в журнале «Геодезия, картография и аэрофотосъемка» (1974, № 20).