

К ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОМУ ОБОСНОВАНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

При многоразрядности планового геодезического обоснования необходим расчет точности отдельных ступеней этого обоснования. Запишем общую формулу

$$M_0 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2}, \quad (1)$$

в которой M_0 — средняя квадратическая ошибка положения точки конечной стадии геодезического обоснования с учетом ошибок исходных данных; m_1, m_2, \dots, m_n — средние квадратические ошибки положения точек отдельных ступеней этого обоснования. Отношения

$$m_n/m_{n-1} = k_{n-1}, \quad m_{n-1}/m_{n-2} = k_{n-2}; \dots; m_2/m_1 = k_1 \quad (2)$$

в [3] названы коэффициентами обеспечения точности. Если

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = k, \quad (3)$$

то, в соответствии с [3],

$$m_i = \frac{M_0 k^{i-1}}{\sqrt{1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2(n-1)}}}, \quad (4)$$

где m_i — средняя квадратическая ошибка положения точки i -й стадии обоснования; n — число всех стадий, начиная с первой наиболее точной. С учетом (4) при двухстадийных построениях

$$k = m_2 / \sqrt{M_0^2 - m_1^2}, \quad (5)$$

при трехстадийных

$$k = \sqrt{\frac{m_3^2 + \sqrt{4M_0^2 m_3^2 - 3m_1^4}}{2(M_0^2 - m_3^2)}}. \quad (6)$$

Входящие в (1) средние квадратические ошибки могут быть различными по величине. Можно предположить, что частью слабо влияющих ошибок на значение функции M_0 можно пренебречь ввиду их малого, по [2] — ничтожного, влияния на M_0 . Установим критерий ничтожности влияния ошибок исходных данных. При этом обозначим через $m_{исх}$ ошибку влияния исходных данных в сетях геодезического обоснования на ошибку M_0 положения его точки, через $m_{изм}$ — совокупное влияние ошибок измерений. Получим

$$M_0^2 = m_{исх}^2 + m_{изм}^2. \quad (7)$$

Поэтому

$$k = m_{изм} / m_{исх}. \quad (8)$$

В таком случае, если ошибка исходных данных в k раз меньше суммарного влияния ошибок измерений, то конечная ошибка M_0 будет больше $m_{\text{изм}}$ в $M_0/m_{\text{изм}}$ раз, а увеличение ошибки в процентах составит

$$q = \frac{100 \cdot \sqrt{k^2 + 1}}{k} - 100. \quad (9)$$

Формула (9) характеризует уменьшение ошибки M_0 , если влиянием исходных данных пренебречь. Значения q для различных k приведены ниже:

k	$q, \%$	k	$q, \%$	k	$q, \%$	k	$q, \%$
1,0	41,4	1,5	20,2	2,0	11,8	5,0	2,0
1,1	35,1	1,6	17,9	2,2	9,8	6,0	1,4
1,2	30,2	1,7	16,0	2,5	7,7	7,0	1,0
1,3	26,2	1,8	14,4	3,0	5,4	8,0	0,8
1,4	22,9	1,9	13,0	4,0	3,1	9,0	0,6

Из анализа приведенных данных видим:

1. В случаях, когда влияние ошибок исходных данных и ошибок измерений принимается примерно одинаковым ($k=1-1,5$), что иногда имеет место в геодезической практике, то неучет ошибок влияния исходных данных на конечную ошибку будет приводить к ее искажению в сторону занижения на 20—40%.

2. При значениях коэффициента обеспечения точности, близких к двум, искажение суммарной средней квадратической ошибки составляет в среднем 10%, что не всегда удовлетворяет необходимым требованиям точности ответственных инженерно-геодезических построений.

3. При $k=3$ значением влияния ошибок исходных данных практически можно пренебречь, так как искажение будет близко к погрешности самой средней квадратической ошибки окончательного результата.

Вероятностная интерпретация коэффициента обеспечения точности в теоретическом плане зависит от характера распределения ошибок исходных данных и измерений. Принимая во внимание подверженность случайных величин нормальному закону распределения вероятностей [1], воспользуемся интегральной формулой Лапласа

$$P = \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (10)$$

которая, если случайная величина t функционально зависима от m_1 и m_2 , выражает вероятность P заключения рассматриваемых рядов ошибок в заданных пределах. При этом будем иметь в виду, что математическое ожидание нормального распределения стремится к нулю, а дисперсия приближенно равна квадрату средней квадратической ошибки.

Для анализа зависимостей вероятностных показателей с коэффициентом обеспечения точности используем формулу, полученную Хаимовым [5]:

$$k = m_2/m_1 = 1 / \sqrt{\left(\frac{t_2}{t}\right)^2 - 1}. \quad (11)$$

Здесь t_2 — нормированный множитель ряда ошибок измерений, которому соответствует вероятность P_2 ; t — нормированный множитель суммарного ряда ошибок измерений в исходных данных, показателем которого является вероятность P .

Результаты вычислений коэффициентов обеспечения точности при различных вариантах соотносимости вероятностных квантилей диапазона 0,999—0,900 функции нормального распределения сведены в табл. 1.

Таким образом, показатели коэффициента обеспечения точности, вычисленные для высоких квантильных интервалов, вероятности которых близки к границе появления ошибок («правило трех сигм»), стремятся к значениям, равным двум; нижняя граница значений рассматриваемого коэффициента в максимуме приближенно равна пяти. Отметим, что в зависимости от различных значений уровней значимости вероятностей появления искомым ошибок можно подбирать соответствующие значения коэффициента обеспечения точности.

Представляет интерес установить функциональную связь между соотношениями ошибок исходных данных и измерений и необходимым числом геодезических измерений. Для этого воспользуемся выражением, известным из теории дисперсионного анализа для несмещенной оценки дисперсии нормального распределения [6],

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (12)$$

Указанное распределение можно записать $\lambda^2\sigma^2/n-1$, где случайная величина λ^2 имеет $f=n-1$ степеней свободы, а σ^2 — это дисперсия генеральной совокупности; $n=n_1+n_2$ численность независимых случайных выборок из генеральной совокупности с нормальными распределениями $N(\mu_1; \sigma_1)$ и $N(\mu_2; \sigma_2)$, причем к первому из них относятся величины x_1, x_2, \dots, x_n ; а ко второму — y_1, y_2, \dots, y_n . Частное выборочных дисперсий

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n_1 - 1}}{\sum_{j=1}^{n_2} \frac{(y_j - \bar{y})^2}{n_2 - 1}}, \quad (13)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i; \quad (14)$$

Зависимость коэффициента обеспечения точности от вероятностей появления ошибок

P_3	P	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994	0,993	0,992	0,991	0,990	0,988	0,986	0,984	0,982	0,980	0,975	0,970	0,965	0,960	0,955	0,950	0,940	0,930	0,920	0,910	0,900	
0,999		∞	2,73	∞																								
0,998		2,10	3,50	∞																								
0,997		1,81	2,57	3,98	∞																							
0,996		1,54	2,19	2,92	4,44	∞																						
0,994		1,52	1,95	2,45	3,22	4,74	∞																					
0,993		1,44	1,80	2,18	2,69	3,46	5,26	∞																				
0,992		1,36	1,67	1,98	2,35	2,84	3,60	5,10	∞																			
0,991		1,30	1,58	1,84	2,15	2,50	3,00	3,80	5,75	∞																		
0,990		1,26	1,52	1,75	2,02	2,32	2,71	3,26	4,27	6,45	∞																	
0,088		1,18	1,40	1,58	1,78	1,98	2,23	2,52	2,95	3,50	4,20	∞																
0,086		1,13	1,32	1,48	1,64	1,81	2,00	2,21	2,50	2,82	3,15	5,00	∞															
0,084		1,08	1,25	1,39	1,53	1,67	1,82	1,98	2,19	2,40	2,62	3,46	5,00	∞														
0,082		1,04	1,19	1,32	1,45	1,57	1,70	1,84	2,00	2,17	2,32	2,87	3,60	5,40	∞													
0,080		1,00	1,15	1,26	1,38	1,48	1,60	1,71	1,85	1,98	2,10	2,50	2,95	3,80	5,40	∞												
0,075		0,93	1,05	1,15	1,24	1,32	1,40	1,49	1,58	1,67	1,75	1,98	2,21	2,52	2,90	3,50	∞											
0,070		0,88	0,99	1,07	1,15	1,22	1,28	1,35	1,43	1,49	1,56	1,72	1,87	2,07	2,28	2,55	3,92	∞										
0,065		0,84	0,94	1,01	1,08	1,14	1,20	1,25	1,32	1,37	1,42	1,55	1,67	1,81	1,96	2,14	2,79	4,20	∞									
0,060		0,80	0,89	0,95	1,01	1,07	1,12	1,17	1,22	1,27	1,31	1,42	1,51	1,62	1,72	1,86	2,27	2,90	4,13	∞								
0,055		0,76	0,85	0,91	0,96	1,01	1,06	1,10	1,15	1,19	1,23	1,32	1,40	1,49	1,57	1,67	1,98	2,38	2,98	4,44	∞							
0,050		0,74	0,82	0,88	0,93	0,97	1,03	1,05	1,10	1,14	1,17	1,25	1,32	1,40	1,47	1,56	1,80	2,10	2,52	3,26	5,00	∞						
0,040		0,70	0,76	0,82	0,86	0,90	0,94	0,97	1,01	1,04	1,06	1,13	1,19	1,25	1,30	1,37	1,54	1,74	1,96	2,30	2,75	3,41	∞					
0,030		0,66	0,72	0,77	0,81	0,84	0,87	0,90	0,94	0,96	0,98	1,04	1,09	1,14	1,18	1,23	1,37	1,51	1,67	1,89	2,13	2,40	3,55	∞				
0,020		0,63	0,69	0,73	0,76	0,80	0,82	0,85	0,88	0,90	0,92	0,97	1,01	1,05	1,10	1,14	1,25	1,36	1,48	1,64	1,80	1,98	2,55	3,80	∞			
0,010		0,60	0,66	0,70	0,73	0,76	0,79	0,81	0,84	0,86	0,88	0,92	0,96	1,00	1,03	1,07	1,16	1,26	1,36	1,48	1,62	1,74	2,12	2,73	4,13	∞		
0,000		0,58	0,63	0,66	0,69	0,72	0,74	0,76	0,79	0,81	0,82	0,86	0,89	0,93	0,96	0,99	1,08	1,15	1,24	1,33	1,43	1,53	1,78	2,14	2,69	3,70	∞	

n_1	$k=1,3$		$k=1,4$		$k=1,5$		$k=1,6$		$k=1,7$		$k=1,8$		$k=1,9$		$k=2,0$	
	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																151
10													401	—	76	—
11												126	—	56	—	—
12											1001	—	87	—	47	—
13											201	—	66	—	41	—
15													51	—	35	—
17									1001	—	91	—	41	—	30	1001
21							401	—	81	—	47	—	34	801	26	151
25							126	—	61	—	39	1001	30	168	24	93
31					401	—	81	—	49	1001	35	189	27	97	22	66
41			1001	—	113	—	59	1001	40	189	30	97	25	66	21	51
51			301	—	81	—	51	301	36	116	28	76	23	56	20	45
76	1001	—	126	—	61	301	43	126	33	81	26	59	22	47	19	39
101	301	—	101	701	56	151	39	101	31	69	25	53	21	43	18	34
201	138	701	71	201	49	101	36	75	29	57	24	47	20	39	18	37
501	101	201	63	126	45	87	34	66	27	51	23	43	20	37	17	32
1001	91	201	59	113	42	79	33	61	—	49	22	42	20	36	17	31

$$\bar{y} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n_2} y_j \quad (15)$$

распределено как λF , причем λ есть отношение дисперсии σ_1^2/σ_2^2 а функция F имеет распределение с $f_1=n_1-1$ и $f_2=n_2-1$ степенями свободы. Математическая запись рассматриваемого распределения определяется выражением

$$F = (\lambda_1^2/f_1)/(\lambda_2^2/f_2). \quad (16)$$

Плотность вероятности случайной величины $F(f_1, f_2)$, характеризующей F -распределение Фишера—Снедекора, задается функцией

$$h_{f_1, f_2}(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{f_1}{2}} F^{\frac{f_1}{2}-1} \left(1 + \frac{f_1}{f_2} F\right)^{-\frac{f_1+f_2}{2}}, \quad (17)$$

где Γ — соответствующие значения гамма-функции Эйлера.

Для определения необходимой численности выборки с рассматриваемыми совокупностями m_1 и m_2 при $m_2^2/m_1^2 = k$, где k —

при различных соотношениях ошибок исходных данных и измерений

$k=2,2$		$k=2,5$		$k=3$		$k=4$		$k=5$		$k=6$		$k=7$		$k=8$		$k=9$	
0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99
						61	—	11	—	7	—	6	71	5	22	4	14
				1001	—	12	—	7	56	6	19	5	13	5	10	4	19
		71	—	26	—	9	101	7	20	5	13	5	10	4	9	4	8
1001	—	34	—	17	—	8	31	6	15	5	11	5	9	4	8	4	7
91	—	26	—	14	—	8	23	6	13	5	10	5	9	4	8	4	7
51	—	22	—	13	101	8	19	6	12	5	10	5	8	4	7	4	7
38	—	19	1001	12	53	8	17	6	12	5	9	5	8	4	7	4	7
32	—	18	201	11	33	7	15	6	11	5	9	5	8	4	7	4	7
28	—	17	107	11	30	7	15	6	11	5	9	5	8	4	7	4	7
26	—	16	74	11	28	7	14	6	10	5	9	5	8	4	7	4	6
24	1001	16	61	10	26	7	14	6	10	5	9	5	8	4	7	4	6
22	151	15	47	10	23	7	13	6	10	5	8	5	8	4	7	4	6
20	97	14	40	10	22	7	13	6	10	5	8	5	7	4	7	4	6
19	61	13	33	10	20	7	12	6	10	5	8	5	7	4	7	4	6
18	49	13	30	10	19	7	12	6	10	5	8	5	7	4	7	4	6
17	41	13	27	9	18	7	12	6	9	5	8	5	7	4	7	4	6
16	35	12	25	9	17	7	12	6	9	5	8	5	7	4	7	4	6
16	33	12	24	9	17	7	11	6	9	5	8	5	7	4	7	4	6
15	30	12	22	9	16	7	11	6	9	5	8	5	7	4	7	4	6
15	28	12	21	9	16	7	11	6	9	5	8	5	7	4	7	4	6
14	27	11	21	9	15	7	11	6	9	5	8	5	7	4	6	4	6
14	26	11	20	9	15	7	11	6	9	5	8	5	7	4	6	4	6
14	25	11	20	9	15	7	11	5	9	5	8	5	7	4	6	4	6

искомый коэффициент отношения измеренных и исходных величин, требуется, чтобы

$$\frac{F_{\alpha}(f_1, f_2)}{F_{\beta}(f_1, f_2)} = k^2. \quad (18)$$

Из таблиц распределения функции F можно найти соответствующее f , сравнивая последовательно при $f=1, 2, 3 \dots$ значения $F_{\alpha}(f_1, f_2)$ со значениями $F_{\beta}(f_1, f_2)$ до тех пор, пока приближенно не получим

$$F_{\alpha}(f_1, f_2) \approx k^2 F_{\beta}(f_1, f_2). \quad (19)$$

Если доверительная вероятность $\beta = 1 - \alpha$, то

$$F_{\alpha}(f_1, f_2) \approx k^2 F_{1-\alpha}(f_1, f_2). \quad (20)$$

Имея в виду, что

$$F_{(1-\alpha)}(f_1, f_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(f_1, f_2)}, \quad (21)$$

получаем

$$F_{\alpha}(f_1, f_2) \approx k. \quad (22)$$

Таким образом, исходя из поставленных условий и пользуясь таблицами [4] при уровнях значимости $\beta_1=0,95$, $\beta_2=0,99$, и $\alpha_1=0,05$, $\alpha_2=0,01$, с учетом $n_1=f_1+1$ и $n_2=f_2+1$, получаем необходимое количество измерений, связанное с соответствующими дисперсионными уровнями m_1 и m_2 (табл. 2).

Из анализа табл. 2 следует:

между коэффициентом обеспечения точности k и числом измерений в развиваемых сетях существует обратная связь, т. е., чем

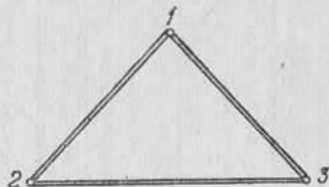


Рис. 1. Сеть исходной трилатерации,

больше значение коэффициента, тем меньше число необходимых измерений; аналогичная зависимость установлена между количеством измерений в исходных и создаваемых сетях при различных

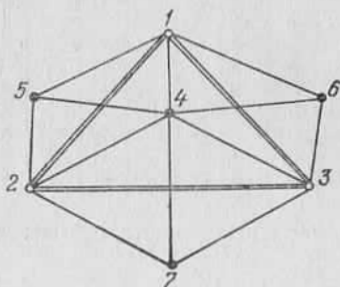


Рис. 2. Схема сети запроектированной трилатерации.

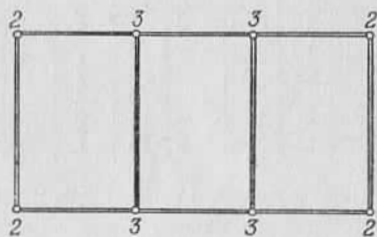


Рис. 3. Схема исходной сети из четырехугольников без диагоналей.

значениях k : чем больше измерений выполнено в исходных построениях, тем меньше их потребуется в заполняющих сетях;

для достижения более высоких вероятностных уровней значимости необходимо увеличивать объем измерений в сетях сгущения;

при значениях коэффициента обеспечения точности диапазона $k=5-9$ число измерений вставляемых сетей практически не зависит от количества измерений в исходных сетях.

По данным табл. 2, численности независимых случайных выборок n_1 и n_2 отождествляются с количеством измерений соответственно исходных и создаваемых геодезических построений. Статистический набор табл. 2 может служить показателем определения вероятностно-функциональной зависимости числа измерений n_2 проектируемых инженерно-геодезических сетей с заданным n_1 количеством ранее выполненных (исходных) измерений и значением коэффициента обеспечения точности. Отмеченное можно иллюстрировать следующими примерами.

Пример 1. Пусть на объекте имеется сеть трилатерации, принятая за исходную, I порядка точности (рис. 1).

В рассматриваемой сети измерены три линии. Требуется определить число измеряемых линий в запроектированной сети II порядка точности при заданном коэффициенте обеспечения точности 4, с доверительной вероятностью $\beta=0,95$.

По табл. 2 определяем n_2 — количество линий запроектированной сети, равное 12. Следовательно, искомая сеть II порядка точности может иметь схему построения, показанную на рис. 2.

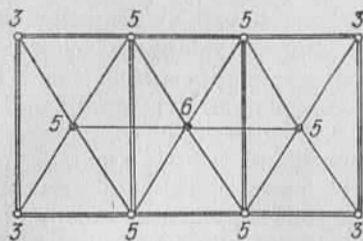


Рис. 4. Схема сети запроектированной триангуляции.

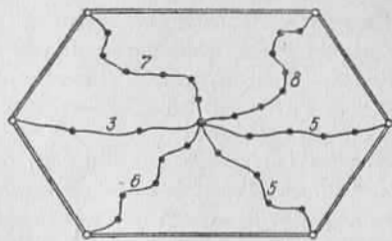


Рис. 5. Проект полигонометрической сети.

Пример 2. На рис. 3 представлена исходная угловая сеть, построенная в виде четырехугольников без диагоналей. Цифры у пунктов сети обозначают число измеренных направлений из соответствующих точек наблюдения.

Следует найти при $n_1=2 \times 4 + 3 \times 4 = 20$ количество измеренных направлений в запроектированной триангуляционной сети сгущения, приняв коэффициент обеспечения точности 1,8, а доверительную вероятность $\beta=0,95$.

Пользуясь табл. 2, находим $n_2 \approx 47$. Один из вариантов развития проектной сети показан на рис. 4. В этой сети число измеряемых направлений составляет $n_2=3 \times 4 + 5 \times 6 + 6 \times 1 = 48$.

Пример 3. Согласно проекту полигонометрической сети двух порядков точности (рис. 5), исходная сеть определена шестью сторонами, что соответствует значению n_1 . Число измеренных сторон в заполняющей сети $n_2=34$. По табл. 2 отыскиваем значение коэффициента обеспечения точности при доверительной вероятности 0,95, равное 2,5.

В заключение отметим, что выполненные исследования нельзя приурочить к развитию государственных геодезических сетей, их можно рекомендовать при проектировании заполняющих инженерно-геодезических построений.

Список литературы: 1. Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений. — М.: Недра, 1969. 2. Кемниц Ю. В. Теория ошибок измерений. — М.: Геодезиздат, 1961. 3. Левчук Г. П., Новак В. Е., Концов В. Г. Прикладная геодезия. Основные методы и принципы инженерно-геодезических работ. — М.: Недра, 1981. 4. Смирнов Н. В., Белугин Д. А. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. — М.: Недра, 1969. 5. Хаимов З. С. Критерии ничтожных и предельных погрешностей. — Изв. вузов. Геодезия и аэросъемка, 1963, вып. 4. 6. Янко Ярослав. Математико-статистические таблицы. — М.: Статистика, 1961.