

В. А. ВИЛЕНСКИЙ
Львовский политехнический институт

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СПЛОШНЫХ СЕТЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ

В некоторых случаях выгодно строить сети трилатерации, состоящие из геодезических четырехугольников [1—5]. Но вопросы оценки точности таких сетей изучены еще недостаточно.

Рассмотрим оценку точности сплошных сетей трилатерации из геодезических четырехугольников (квадратов). В качестве первого приближения к сплошной сети возьмем строенный ряд из геодезических квадратов, показанный на рисунке, и оценим ошибки в положении удаленного пункта L (т. е. продольный и поперечный сдвиг этого пункта) и ошибку определения дирекционного угла стороны LT . Присоединив к нему сверху и снизу геодезические квадраты, имеющие по две общие вершины, получим пятикратный ряд геодезических квадратов. Продолжая процесс присоединения рядов сверху и снизу, получаем семикратный и т. д. ряды трилатерации, все ближе подходящие по своему виду к сплошным сетям трилатерации. При этом значения искомых обратных весов, найденные на каждом таком этапе из совместного решения весовых функций с системой условных уравнений, будут принимать все более точные значения. Количество рядов увеличиваем до тех пор, пока изменения в обратных весах выбранных функций уравновешенных величин станут малоощутимы.

Средние квадратичные ошибки функций уравновешенных элементов геодезической сети определяли по обратным весам, полученным по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \sum_{i=1}^n \frac{[a_i f (i-1)]}{[a_i a_i (i-1)]}, \quad (1)$$

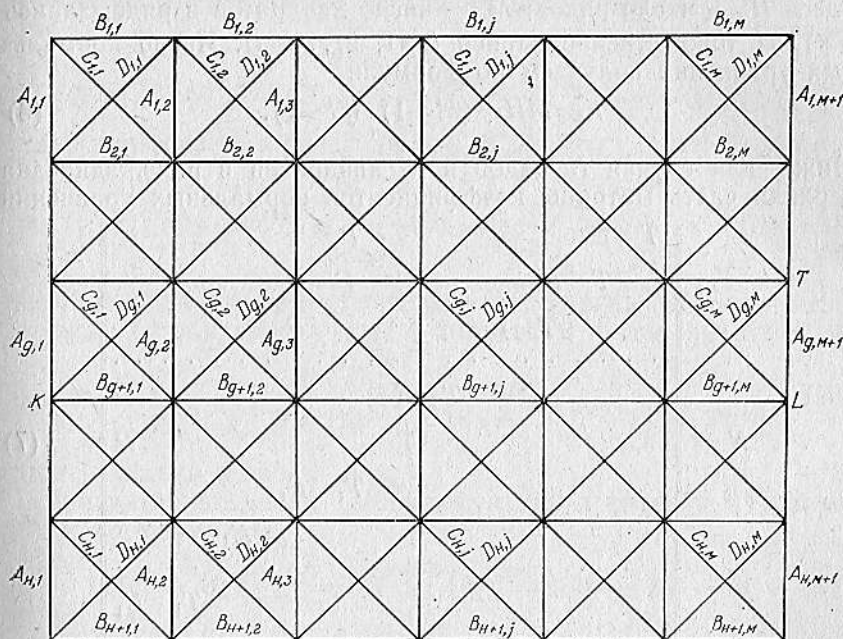


Схема сплошной сети трилатерации.

тогда

$$m_F = \mu \sqrt{1/P_F}, \quad (2)$$

где f — частные производные весовой функции; a_i — коэффициенты условных уравнений; n — число условных уравнений; μ — ошибка единицы веса.

Виды условных уравнений, нормальных уравнений и весовых функций. В свободной сети трилатерации, представленной на рисунке, возникают условные уравнения фигур двух видов:

$$(A)_{i,j} + (A)_{i,j+1} + (B)_{i,j} + (B)_{i+1,j} - \sqrt{2} [(C)_{i,j} + (D)_{i,j}] + W_{i,j} = 0; \quad (3)$$

$$(A)_{i,j+1} + (A)_{i+1,j+1} + (B)_{i+1,j} + (B)_{i+1,j+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} [(C)_{i,j+1} + (C)_{i+1,j} + (D)_{i,j} + (D)_{i+1,j+1}] + V_{i,j} = 0, \quad (4)$$

где (A) , (B) , (C) , (D) — поправки в стороны A , B , C , D . Свободные члены условных уравнений равны

$$W_{i,j} = \frac{s}{\rho} \cdot w_{i,j}^s; \quad i = \overline{1, H}, \quad j = \overline{1, M};$$

$$V_{i,j} = \frac{2s}{\rho} v_{i,j}^s; \quad i = \overline{1, H-1}, \quad j = \overline{1, M-1}. \quad (5)$$

Здесь H — число рядов; M — число квадратов в ряду; запись $i=\overline{1, H}$ тождественна записи $i=1, 2, \dots, H$. Число нормальных уравнений получаем по формуле

$$n = MH + (M-1) \cdot (H-1). \quad (6)$$

Ниже, для случая H рядов и M квадратов в ряду, записана верхняя часть матрицы коэффициентов нормальных уравнений

$$N = \left(\begin{array}{cccccccc} T & E & & & & & & P \\ & T & E & & & & & P & P \\ & & T & E & & & & P & \\ \dots & & & & & & & & \\ & & & T & E & & & & P \\ & & & T & & & & & P \\ & & & & & T_1 & E_1 & & \\ & & & & & & T_1 & E_1 & \\ & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & T_1 & E_1 \\ & & & & & & & & & T_1 \end{array} \right), \quad (7)$$

где T, T_1, E, P, E_1 — симметричные квадратные подматрицы размерности $M \times M, (M-1) \times (M-1), M \times M, M \times (M-1), (M-1) \times (M-1)$:

$$T = \left(\begin{array}{ccc} 8 & 1 & \\ 1 & 8 & 1 \\ \dots & & \\ & 1 & 8 & 1 \\ & & & 1 & 8 \end{array} \right), \quad T_1 = \left(\begin{array}{ccc} 6 & 1 & \\ 1 & 6 & 1 \\ \dots & & \\ & 1 & 6 & 1 \\ & & & 1 & 6 \end{array} \right), \quad E = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ \dots & & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{array} \right),$$

$$P = \left(\begin{array}{ccc} 3 & & \\ 3 & 3 & \\ & 3 & \\ \dots & & \\ & & 3 \\ & & & 3 \end{array} \right), \quad E_1 = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0,5 & & \\ 0,5 & 1 & 0,5 & \\ & 0,5 & 1 & 0,5 \\ \dots & & & \\ & & 0,5 & 1 & 0,5 \\ & & & 0,5 & 1 & 0,5 \end{array} \right).$$

Запишем теперь выражения весовых функций оцениваемых элементов сети.

Весовая функция длины диагонали KL имеет вид

$$F_u = \sum_{j=1}^M (B)_{g+1, j}; \quad g = \frac{H+1}{2}. \quad (8)$$

Для направления той же диагонали получаем

$$F_t = M \cdot [(A)_{g,1} + (B)_{g+1,1} - \sqrt{2}(C)_{g,1}] + \\ + (M-1) \cdot [2(A)_{g,2} + (B)_{g+1,1} + (B)_{g+1,2} - \sqrt{2}(C)_{g,2} - \sqrt{2}(D)_{g,1}] + \\ + (M-2) \cdot [2(A)_{g,3} + (B)_{g+1,2} + (B)_{g+1,3} - \sqrt{2}(C)_{g,3} - \sqrt{2}(D)_{g,2}] + \\ \dots \\ + 1 [2(A)_{g,M} + (B)_{g+1,M-1} + (B)_{g+1,M} - \sqrt{2}(C)_{g,M} - \sqrt{2}(D)_{g,M-1}]. \quad (9)$$

Весовую функцию дирекционного угла стороны LT ряда после перехода от поправок в углы к поправкам в стороны запишем:

$$F_\alpha = \frac{\rho}{s} \sum_{j=1}^M [(B)_{g,j} - (B)_{g+1,j}], \quad (10)$$

где s — длина стороны сети.

Квадратичные члены весовых функций в формуле (1) определим по формулам:

$$[f_u f_u] = M; [f_\alpha f_\alpha] = 2M \cdot \frac{\rho^2}{s}; [f_t f_t] = 4M^3 - M^2 + M. \quad (11)$$

Системе условных уравнений (3) и (4) и весовым функциям (8), (9), (10) соответствуют векторы нормальных коэффициентов весовых функций:

$$N_u = \|\Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_5 [f_u f_u]\|; \\ N_\alpha = \frac{\rho}{s} \left\| \Gamma_1 \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_5 \Gamma_5 \frac{s}{\rho} [f_\alpha f_\alpha] \right\|; \quad (12) \\ N_t = \|\Gamma_0 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_6 \Gamma_7 [f_t f_t]\|,$$

здесь $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ — векторы $1 \times M$

$$\Gamma_0 = \|\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots 0 \|, \Gamma_1 = \|\ 1 \quad 1 \quad \dots 1 \|, \\ \Gamma_2 = \|\ 9M+5 \ 10M-15 \ 10M-25 \ \dots 5 \|, \Gamma_3 = \|\ 2M-1 \ 2M-3 \ \dots 1 \|, \quad (12a)$$

а векторы $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7$ — $1 \times (M-1)$

$$\Gamma_4 = \|\ 0 \quad 0 \quad \dots 0 \|, \Gamma_5 = \|\ 2 \quad 2 \quad \dots 2 \|, \\ \Gamma_6 = \|\ 8(M-1) \ 8(M-2) \ \dots 8 \|, \Gamma_7 = \|\ 4(M-1) \ 4(M-2) \ \dots 4 \| \quad (12b)$$

Строенный ряд трилатерации. Обозначим векторы коэффициентов условных уравнений фигур вида (3) первого ряда a_i , второго b_i , третьего c_i , где $i = \overline{1, M}$, а векторы коэффициентов условных уравнений фигур вида (4) первого ряда k_i , второго l_i ,

где $i=1, H-1$. Сохранив символику Гаусса, формула (1) для данного случая примет вид

$$\frac{1}{P_{F}^{III}} = [ff] - \sum_{i=1}^M \frac{[a_i f \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_{i-1} (i-1)]} - \sum_{i=1}^M \frac{[b_i f \cdot (M+i-1)]^2}{[b_i b_{i-1} (M+i-1)]} -$$

$$- \sum_{i=1}^M \frac{[c_i f \cdot (2M+i-1)]^2}{[c_i c_{i-1} (2M+i-1)]} - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{[k_i f (3M+i-1)]^2}{[k_i k_{i-1} (3M+i-1)]} -$$

$$- \sum_{i=1}^{M-1} \frac{[l_i f \cdot (4M+i-2)]^2}{[l_i l_{i-1} \cdot (4M+i-2)]}, \quad (13)$$

где индекс III обозначает, что обратный вес определяем для строенного ряда.

Определим теперь преобразованные квадратичные коэффициенты нормальных уравнений, для чего каждый из них распишем по алгоритму Гаусса, пренебрегая малыми членами порядка 0,001. Получим равенства:

$$[a_i a_i (i-1)]_{i=1}^M = [a_i a_i] - \frac{[a_{i-1} a_i \cdot (i-2)]^2}{[a_{i-1} a_{i-1} (i-2)]};$$

$$[b_i b_i \cdot (M+i-1)]_{i=1}^M = [b_i b_i] - \frac{[a_i b_i \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} - \frac{[b_{i-1} b_i (M+i-2)]^2}{[b_{i-1} b_{i-1} (M+i-2)]};$$

$$[c_i c_i \cdot (2M+i-1)]_{i=1}^M = [c_i c_i] - \frac{[b_i c_i \cdot (M+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (M+i-1)]} -$$

$$- \frac{[c_{i-1} c_i (2M+i-2)]^2}{[c_{i-1} c_{i-1} \cdot (2M+i-2)]}; \quad (14)^*$$

$$[k_i k_i \cdot (3M+i-1)]_{i=1}^{M-1} = [k_i k_i] - \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{[a_z k_i \cdot (z-1)]^2}{[a_z a_z \cdot (z-1)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{[b_z k_i \cdot (M+z-1)]^2}{[b_z b_z \cdot (M+z-1)]} \right\} - \frac{[k_{i-1} k_i \cdot (3M+i-2)]^2}{[k_{i-1} k_{i-1} \cdot (3M+i-2)]};$$

$$[l_i l_i \cdot (4M+i-2)]_{i=1}^{M-1} = [l_i l_i] - \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{[b_z l_i \cdot (M+z-1)]^2}{[b_z l_z \cdot (M+z-1)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{[c_z l_i \cdot (2M+z-1)]^2}{[c_z c_z \cdot (2M+z-1)]} \right\} - \frac{[l_{i-1} l_i \cdot (4M+i-3)]^2}{[l_{i-1} l_{i-1} \cdot (4M+i-3)]}, \quad (15)^*$$

где $z=i+j-1$.

* Дроби, в числителях или знаменателях которых хоть один индекс меньше единицы или больше M , следует отбросить.

В этих равенствах, как следует из матрицы (7):

$$\begin{aligned} [a_i a_i] &= [b_i b_i] = [c_i c_i] = 8; & i = \overline{1, M}; \\ [k_i k_i] &= [l_i l_i] = 6; & i = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Легко показать, что

$$[a_i b_i \cdot (i-1)] = [b_i c_i \cdot (M+i-1)] = 1, \quad i = \overline{1, M};$$

$$[a_{i-1} a_i \cdot (i-2)] = 1, \quad i = \overline{2, M};$$

$$[b_i b_{i+1} \cdot (M+i-1)] = [c_i c_{i+1} \cdot (2M+i-1)] = 1, 016; \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (17)$$

Обозначим пределы последовательностей квадратичных коэффициентов, соответствующих условным уравнениям фигур вида (1) i -го ряда, через X_i , где $i = \overline{1, H}$. Эти последовательности, как следует из равенств (14), являются цепными дробями, пределы которых легко определить из равенств:

$$X_1 = 8 - \frac{1}{X_1}, \quad X_i = 8 - \frac{1}{X_{i-1}} - \frac{1}{X_i}, \quad i = \overline{2, H}. \quad (18)$$

Из решения квадратных уравнений:

$$X_1 = 7,8730, \quad X_2 = 7,7373, \quad X_3 = 7,7346, \quad X_i = 7,7345, \quad i = \overline{4, H}. \quad (19)$$

Элементы последовательности $\{[a_i a_i][b_i b_i][c_i c_i] \dots\}$ также образуются по закону цепной дроби. Ее предел

$$X_0 = 8 - \frac{1}{X_2} = 7,8708. \quad (20)$$

Хотя вычисление преобразованных квадратичных коэффициентов, соответствующих условным уравнениям фигур вида (4), более сложные, тем не менее они также образуются по закону цепной дроби. Пределы, к которым стремятся эти цепные дроби, соответственно для первого и второго рядов центральных систем вычисляем по формулам

$$X_{H+1} = 6 - \Sigma_1 - \frac{\{[k_1 k_2 \cdot HM]^2\}}{X_{H+1}};$$

$$X_{H+2} = 6 - \Sigma_2 - \frac{\{[l_1 l_2 \cdot ((H+1)M-1)]^2\}}{X_{H+2}}.$$

Аналогично для j -го ряда

$$X_{H+j} = 6 - \Sigma_j - \frac{\{[t_1 t_2 \cdot (H+j-1)M-j+1]^2\}}{X_{H+j}}. \quad (21)$$

Здесь $\{[k_1 k_2 \cdot HM]\}$, $\{[l_1 l_2 \cdot ((H+1)M-1)]\}$, $\{[t_1 t_2 \cdot ((H+j-1)M-j+1)]\}$ — пределы последовательностей $\{[k_i k_{i+1} \times \times ((HM+i-1)]\}$, $\{[l_i l_{i+1} \cdot ((H+1)M+i-2)]\}$, $\{[t_i t_{i+1} \cdot ((H+j-1)M+i-j+1)]\}$; $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_j$ — пределы последовательностей $\Sigma_1^i, \Sigma_2^i, \Sigma_j^i$, где $i=1, M-1$. В табл. 1 приведены преобразованные квадратичные коэффициенты, полученные из решения нормальных уравнений.

Таблица 1

Преобразованные квадратичные коэффициенты нормальных уравнений

i	$[a_i a_i \cdot (i-1)]$	$[b_i b_i \cdot (M+i-1)]$	$[c_i c_i \cdot (2M+i-1)]$	$[k_i k_i \cdot (3M+i-1)]$	$[l_i l_i \cdot (4M+i-2)]$
1	8,0000	7,8730	7,8708	2,3584	2,1161
2	7,8750	7,7398	7,7371	2,1718	1,7008
3	7,8730	7,7373	7,7347	2,1712	1,6748
4	7,8730	7,7373	7,7346	2,1707	1,6746
5	7,8730	7,7373	7,7346	2,1707	1,6741
$M-3$	7,8730	7,7373	7,7346	2,1707	1,6741
$M-2$	7,8730	7,7373	7,7346	2,1709	1,6754
$M-1$	7,8730	7,7373	7,7347	2,1907	1,7721
M	7,8730	7,7395	7,7370		

Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовых функций F_u и F_α для всех i в интервале $6 \leq i \leq M-4$ равны предельным значениям X_u^j и X_α^j , $j=1, 2, H-1$. Например, для $j=1$ неквадратичные коэффициенты весовой функции дирекционно-го угла стороны LT определяем из равенства

$$[a_i f_\alpha(i-1)] = [a_i f_\alpha] - \frac{[a_{i-1} a_i (i-2)][a_{i-1} f_\alpha(i-2)]}{[a_{i-1} a_{i-1} (i-2)]}. \quad (22)$$

При $i \rightarrow \infty$ равенство (22) примет вид

$$X_\alpha^1 = 1 - \frac{X_\alpha^1}{X_1^1},$$

откуда
$$X_\alpha^1 = 1 / \left(1 + \frac{1}{X_1^1} \right) = 0,8873. \quad (23)$$

Подставив теперь в формулу (13) соответствующее значение квадратичного члена из (11) и коэффициенты из табл. 1 и 2, получим выражение для $\frac{1}{P_{III}^\alpha}$

$$\frac{1}{P_{III}^\alpha} = \frac{\rho^2}{s^2} (0,167 M + 1,948). \quad (24)$$

Произведя аналогичные вычисления для $\frac{1}{P_{III}^u}$, найдем

$$\frac{1}{p_{\text{III}}^u} = 0,223 M + 0,871. \quad (25)$$

Если для весовых функций F_α и F_u образование неквадратичных коэффициентов, начиная с $i=6$ (табл. 2 и 3), описывалось полиномами нулевой степени, то образование преобразованных неквадратичных коэффициентов весовой функции поперечного сдвига F_i для i в интервале $6 \leq i \leq M-6$ описывается полиномами первой степени.

Таблица 2
Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции F_α^{III}

i	$[a_i f_\alpha \cdot (i-1)]$	$[b_i f_\alpha \cdot (M+i-1)]$	$[c_i f_\alpha \cdot (2M+i-1)]$	$[k_i f_\alpha \cdot (3M+i-1)]$	$[l_i f_\alpha \cdot (4M+i-2)]$
1	1,0000	-0,1127	-0,9869	1,3667	-0,7084
2	0,8750	-0,0838	-0,8630	1,7663	-0,6857
3	0,8889	-0,0892	-0,8766	1,7582	-0,6595
4	0,8720	-0,0883	-0,8748	1,7307	-0,6563
5	0,8873	-0,0884	-0,8750	1,7270	-0,6564
6	0,8873	-0,0884	-0,8750	1,7282	-0,6564
$M-4$	0,8873	-0,0884	-0,8750	1,7282	-0,6565
$M-3$	0,8873	-0,0884	-0,8750	1,7277	-0,6326
$M-2$	0,8873	-0,0886	-0,8749	1,7323	-0,6176
$M-1$	0,8873	-0,0868	-0,8756	1,6977	-0,9135
M	0,8873	-0,1013	-0,8720		

Таблица 3
Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции F_u^{III}

i	$[a_i f_u \cdot (i-1)]$	$[b_i f_u \cdot (M+i-1)]$	$[c_i f_u \cdot (2M+i-1)]$	$[k_i f_u \cdot (3M+i-1)]$	$[l_i f_u \cdot (4M+i-1)]$
1	0,0000	1,0000	0,8858	-0,5180	0,6056
2	0,0000	0,8709	0,7863	-0,6310	0,7875
3	0,0000	0,8859	0,7956	-0,6219	0,8510
4	0,0000	0,8840	0,7946	-0,6127	0,8538
5	0,0000	0,8840	0,7946	-0,6117	0,8450
6	0,0000	0,8840	0,7946	-0,6122	0,8397
$M-3$	0,0000	0,8840	0,7946	-0,6122	0,8397
$M-2$	0,0000	0,8840	0,7944	-0,6101	0,8318
$M-1$	0,0000	0,8840	0,7964	-0,6343	0,8259
M	0,0000	0,8841	0,7812		0,8813

Покажем это на примере образования преобразованных неквадратичных коэффициентов, соответствующих условным уравнениям фигур вида (3) второго ряда. Для этого указанные коэффициенты предварительно расписем по алгоритму Гаусса

$$[b_{if_t} \cdot (M+i-1)]_{i=2}^M = [b_{if_t}] - \frac{[b_{i-1} f_t \cdot (M+i-2)][b_{i-1} b_i \cdot (M+i-2)]}{[b_{i-1} b_{i-1} \cdot (M+i-2)]}. \quad (26)$$

Исходя из формул (17) и (19), вычислим предел отношения

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{[b_{i-1} b_i \cdot (M+i-2)]}{[b_{i-1} b_{i-1} \cdot (M+i-2)]} = \frac{1,016}{7,737} = 0,1312. \quad (26a)$$

Преобразовав выражение для первой дифференциальной разности $\Delta = [b_i f_i (M+i-1)] - [b_{i+1} f_i (M+i)]$ согласно (26), (26a) и (12a), получим уравнение $\Delta = 10 - 0,1312 \Delta$, откуда $\Delta = 8,8405$.

Окончательно для $6 \leq i \leq M-1$

$$[b_{M-i+1} f_i \cdot 2M - i]_6^{M-1} = 8,8405 i - 5,4436. \quad (27)$$

Аналогично можно определить, что

$$\begin{aligned} [c_{M-i+1} f_i \cdot (3M - i)]_4^{M-5} &= 0,8750 i - 0,5388; \\ [k_{M-i} f_i \cdot (4M - i - 1)]_5^{M-6} &= -1,7282 i - 0,2633; \\ [l_{M-i} f_i \cdot (5M - i - 2)]_5^{M-6} &= 0,6564 i + 0,2104. \end{aligned} \quad (28)$$

Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции поперечного сдвига, соответствующие условным уравнениям крайних фигур, приведены в табл. 4.

Подставив $[f_i f_i]$ из формулы (11) и преобразованные коэффициенты из табл. 1 и 4 и найденные из формул (27) и (28) в (13), получим

$$\frac{1}{P_{\text{III}}} = 0,055498 M^3 + 0,9762 M^2 + 0,4052 M + 0,435. \quad (29)$$

Пятикратный и семикратный ряды трилатерации. Обозначим векторы коэффициентов условных уравнений фигур вида (3) первого—пятого рядов соответственно a_i, b_i, c_i, d_i, e_i , где $i = \overline{1, M}$, а векторы коэффициентов условных уравнений фигур вида (4) соответственно k_i, l_i, m_i, n_i , где $i = \overline{1, M-1}$.

Согласно принятым выше, обозначениям формула (1) для данного случая примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_V} = [ff] - \sum_{i=1}^M \frac{[a_i f \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} - \sum_{i=1}^M \frac{[b_i f \cdot (M+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (M+i-1)]} - \dots - \\ - \sum_{i=1}^M \frac{[e_i f \cdot (4M+i-1)]^2}{[e_i e_i \cdot (4M+i-1)]} - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{[k_i f \cdot (5M+i-1)]^2}{[k_i k_i \cdot (5M+i-1)]} - \\ - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{[l_i f \cdot (6M+i-2)]^2}{[l_i l_i \cdot (6M+i-2)]} - \dots - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{[n_i f \cdot (8M+i-4)]^2}{[n_i n_i \cdot (8M+i-4)]}. \end{aligned} \quad (30)$$

Преобразованные квадратичные коэффициенты нормальных уравнений и преобразованные неквадратичные коэффициенты весовых функций определяли по той же методике (табл. 5—8).

Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции F_t^{III}

i	$[b_i f_t \cdot (M+i-1)]$	$[c_i f_t \cdot (2M+i-1)]$	$[k_i f_t \cdot (3M+i-1)]$	$[l_i f_t \cdot (4M+i-2)]$
1	9,0000M— 5,0000	0,9869M—0,5610	—1,3667M+1,2649	0,7084M—0,7618
2	8,8384M—14,3546	0,8630M—1,4034	—1,7663M+3,1508	0,6857M—1,1927
3	8,8414M—23,1156	0,8766M—2,2914	—1,7581M—4,9297	0,6603M—1,7855
4	8,8404M—31,9666	0,8749M—3,1639	—1,7312M—6,6578	0,6584M—2,4348
5	8,8405M—40,8055	0,8749M—4,0389	—1,7282M—8,3854	0,6565M—3,0913
M-6	56,4399	5,5861	10,6325	4,1488
M-5	47,5994	4,7112	8,9043	3,4923
M-4	38,7589	3,8362	7,1763	2,8330
M-3	29,9184	2,9610	5,4461	2,1733
M-2	21,0779	2,0874	3,7348	1,5770
M-1	12,2374	1,2022	1,8640	1,2069
M	3,3972	0,4034		

Примечание: $[a_i f_t \cdot (i-1)]_{i=1}^M = 0$.

Таблица 5

Преобразованные квадратичные коэффициенты нормальных уравнений

i	$[a_i^2 \cdot (i-1)]$	$[b_i^2 \cdot (M+i-1)]$	$[c_i^2 \cdot (2M+i-1)]$	$[d_i^2 \cdot (3M+i-1)]$	$[e_i^2 \cdot (4M+i-1)]$	$[k_i^2 \cdot (5M+i-1)]$	$[l_i^2 \cdot (6M+i-2)]$	$[m_i^2 \cdot (7M+i-3)]$	$[n_i^2 \cdot (8M+i-4)]$
1	8,0000	7,8730	7,8708	7,8708	7,8708	2,3581	2,0965	2,0762	2,0922
2	7,8750	7,7398	7,7371	7,7371	7,7371	2,1715	1,6737	1,5884	1,5958
3	7,8730	7,7374	7,7347	7,7346	7,7346	2,1708	1,6462	1,5136	1,4992
4	7,8730	7,7373	7,7346	7,7345	7,7345	2,1703	1,6454	1,5059	1,4788
5	7,8730	7,7373	7,7346	7,7345	7,7345	2,1703	1,6454	1,5059	1,4763
M-4	7,8730	7,7373	7,7346	7,7345	7,7345	2,1703	1,6454	1,5059	1,4763
M-3	7,8730	7,7373	7,7346	7,7345	7,7345	2,1703	1,6458	1,5061	1,4773
M-2	7,8730	7,7373	7,7346	7,7345	7,7345	2,1706	1,6467	1,5122	1,4951
M-1	7,8730	7,7373	7,7346	7,7346	7,7345	2,1903	1,7435	1,6663	1,6758
M	7,8730	7,7395	7,7370	7,7370	7,7370				

Подставляя преобразованные коэффициенты из табл. 5—8 и квадратичные коэффициенты весовых функций, вычисленные по формулам (11) в (30), находим

$$\frac{1}{P_v^u} = 0,121 M + 1,284; \quad \frac{1}{P_v^a} = (0,045 M + 2,265) \frac{\rho^2}{s^2}; \quad (31)$$

$$\frac{1}{P_v^t} = 0,014798 M^3 + 1,13477 M^2 + 0,2186 M + 0,538.$$

Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции F_u^V

i	$[a_i f_u \cdot (i-1)]$	$[b_i f_u \cdot (M+i-1)]$	$[c_i f_u \cdot (2M+i-1)]$	$[d_i f_u \cdot (3M+i-1)]$	$[e_i f_u \cdot (4M+i-1)]$	$[k_i f_u \cdot (5M+i-1)]$	$[l_i f_u \cdot (6M+i-2)]$	$[m_i f_u \cdot (7M+i-3)]$	$[n_i f_u \cdot (8M+i-4)]$
1	0,0000	0,0000	1,0000	0,8858	-0,1010	0,0553	-0,4914	0,5397	-0,0860
2	0,0000	0,0000	0,8708	0,7863	-0,0766	0,0637	-0,6491	0,6444	+0,1458
3	0,0000	0,0000	0,8858	0,7956	-0,0809	0,0626	-0,7083	0,6883	+0,2843
4	0,0000	0,0000	0,8837	0,7945	-0,0803	0,0618	-0,7069	0,6906	0,3438
5	0,0000	0,0000	0,8839	0,7946	-0,0803	0,0618	-0,6966	0,6910	0,3644
6	0,0000	0,0000	0,8839	0,7946	-0,0803	0,0618	-0,6920	0,6910	0,3687
M-6	0,0000	0,0000	0,8839	0,7946	-0,0803	0,0618	-0,6920	0,6910	0,3687
M-5	0,0000	0,0000	0,8839	0,7946	-0,0803	0,0618	-0,6920	0,6857	0,3687
M-4	0,0000	0,0000	0,8839	0,7946	-0,0803	0,0618	-0,6911	0,6762	0,3681
M-3	0,0000	0,0000	0,8839	0,7946	-0,0803	0,0619	-0,6909	0,6659	0,3667
M-2	0,0000	0,0000	0,8839	0,7944	-0,0804	0,0608	-0,6872	0,5930	0,3426
M-1	0,0000	0,0000	0,8839	0,7964	-0,0791	0,0669	-0,7253	0,8224	0,0561
M	0,0000	0,0000	0,8840	0,7812	-0,0906				

Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции F_a^V

i	$[a_i f_a \cdot (i-1)]$	$[b_i f_a \cdot (M+i-1)]$	$[c_i f_a \cdot (2M+i-1)]$	$[d_i f_a \cdot (3M+i-1)]$	$[e_i f_a \cdot (4M+i-1)]$	$[k_i f_a \cdot (5M+i-1)]$	$[l_i f_a \cdot (6M+i-2)]$	$[m_i f_a \cdot (7M+i-3)]$	$[n_i f_a \cdot (8M+i-4)]$
1	0,0000	1,0000	-0,1142	-0,9867	0,1127	-0,5727	1,0921	-0,6236	0,0342
2	0,0000	0,8709	-0,0845	-0,8629	0,0838	-0,6941	1,4352	-0,4932	-0,1838
3	0,0000	0,8859	-0,0902	-0,8765	0,0892	-0,6840	1,5609	-0,3872	-0,2354
4	0,0000	0,8838	-0,0893	-0,8749	0,0884	-0,6729	1,5633	-0,3499	-0,2300
5	0,0000	0,8840	-0,0893	-0,8749	0,0884	-0,6732	1,5441	-0,3440	-0,2203
6	0,0000	0,8840	-0,0893	-0,8749	0,0884	-0,6732	1,5349	-0,3430	-0,2140
7	0,0000	0,8840	-0,0893	-0,8749	0,0884	-0,6732	1,5337	-0,3430	-0,2140
M-5	0,0000	0,8840	-0,0893	-0,8749	0,0884	-0,6732	1,5337	-0,3430	-0,2140
M-4	0,0000	0,8840	-0,0893	-0,8749	0,0884	-0,6733	1,5325	-0,3326	-0,2128
M-3	0,0000	0,8840	-0,0893	-0,8749	0,0884	-0,6737	1,5244	-0,3179	-0,2325
M-2	0,0000	0,8840	-0,0895	-0,8749	0,0886	-0,6704	1,5154	-0,3652	-0,3021
M-1	0,0000	0,8840	-0,0875	-0,8756	0,0868	-0,7004	1,6076	-0,7760	-0,0999
M	0,0000	0,8841	-0,1028	-0,8718	0,1013				

Преобразованные неквадратичные коэффициенты весовой функции F_t^V

i	$[c_i f_t \cdot (2M+i-1)]$	$[a_i f_t \cdot (3M+i-1)]$	$[e_i f_t \cdot (4M+i-1)]$	$[k_i f_t \cdot (5M+i-1)]$	$[l_i f_t \cdot (6M+i-2)]$	$[m_i f_t \cdot (7M+i-3)]$	$[n_i f_t \cdot (8M+i-4)]$
1	9,0000M - 5,0000	0,9867M - 0,5607	-0,1127M + 0,0525	0,5727M - 0,5151	-1,0921M + 0,9394	0,6236M - 0,6047	0,0342M - 0,1554
2	8,8371M - 14,3536	0,8629M - 1,4028	-0,0838M + 0,1415	0,6941M - 1,2329	-1,4352M + 2,4370	0,4932M - 0,7370	0,1836M - 0,3921
3	8,8403M - 23,1135	0,8765M - 2,2918	-0,0892M + 0,2317	0,6840M - 1,9206	-1,5610M + 4,0683	0,3868M - 0,9675	0,2353M - 0,5874
4	8,8393M - 31,9633	0,8747M - 3,1627	-0,0882M + 0,3187	0,6739M - 2,5976	-1,5634M + 5,6388	0,3491M - 1,2678	0,2306M - 0,7824
5	8,8394M - 40,3012	0,8749M - 4,0379	-0,0884M + 0,4081	0,6729M - 3,2646	-1,5441M + 7,1720	0,3438M - 1,6013	0,2231M - 0,9871
6	8,8394M - 49,6407	0,8749M - 4,9135	-0,0883M + 0,4950	0,6732M - 3,9367	-1,5345M + 8,7009	0,3475M - 1,9493	0,1830M - 0,6034
M-6			4,1426		-9,7031	2,2829	1,4392
M-5	47,5927	4,7107	-0,4759	3,4693	-8,1699	1,9250	1,2182
M-4	38,7533	3,8358	-0,3875	2,7961	-6,6358	1,5686	1,0050
M-3	29,9139	2,9807	-0,2990	2,1216	-5,0982	1,2303	0,8121
M-2	21,0745	2,0870	-0,2111	1,4551	-3,5920	0,9451	0,6623
M-1	12,2352	1,2020	-0,1209	0,7483	-1,9946	0,9508	0,4158
M	3,3961	0,9035	-0,0363				

Примечание:

$$[a_i f_t \cdot (i-1)]_i^M = 0;$$

$$[b_i f_t \cdot (M+i-1)]_i^M = 0;$$

$$[c_{M-i+i} f_t \cdot (3M-i)]_6^{M-6} = 8,83042i - 5,4438;$$

$$[d_{M-i+i} f_t \cdot (4M-i)]_6^{M-6} = 0,87492i - 0,5388;$$

$$[e_{M-i+i} f_t \cdot (5M-i)]_6^{M-6} = 0,08839i - 0,6545;$$

$$[k_{M-i} f_t \cdot (6M-i-1)]_6^{M-6} = 0,67336i - 0,5769;$$

$$[l_{M-i} f_t \cdot (7M-i-2)]_6^{M-6} = -1,5328i - 1,0139;$$

$$[m_{M-i} f_t \cdot (8M-i-3)]_6^{M-6} = 0,3470i - 0,4929;$$

$$[n_{M-i} f_t \cdot (9M-i-4)]_6^{M-6} = 0,2240i - 0,1078.$$

Аналогично можно получить формулы (32) для семикратного ряда

$$\frac{1}{P_u^{\text{VII}}} = 0,081 M + 1,546; \quad \frac{1}{P_a} = (0,017 M + 2,385) \cdot \frac{\rho^2}{s^2};$$

$$\frac{1}{P_t^{\text{VII}}} = 0,006685 M^3 + 1,17464 M^2 + 0,1933 M + 0,598. \quad (32)$$

Проверка формул (24), (25), (29), (31), (32) выполнялась на аналогичных моделях путем решения нормальных уравнений по схеме Гаусса на ЭВМ М-222.

Таблица 9

Результаты проверки полученных формул

<i>M</i>	$\frac{1}{P_u}$ по формуле	$\frac{1}{P_u}$ по схеме Гаусса	Ошибка, %	$\frac{1}{P_t}$ по формуле	$\frac{1}{P_t}$ по схеме Гаусса	Ошибка, %	$\frac{1}{P_a}$ по формуле	$\frac{1}{P_a}$ по схеме Гаусса	Ошибка, %
Строенный ряд									
3	1,54	1,56	1,2	11,94	11,96	0,2	2,45 q	2,46 q	0,4
4	1,76	1,78	0,8	21,23	21,23	0,0	2,62 q	2,62 q	0,0
5	1,99	1,99	0,0	33,80	33,80	0,0	2,78 q	2,78 q	0,0
10	3,10	3,10	0,0	157,61	157,61	0,0	3,62 q	3,62 q	0,0
14	4,00	4,00	0,0	349,74	349,76	0,0	4,28 q	4,28 q	0,0
17	4,66	4,66	0,0	562,13	562,18	0,0	4,78 q	4,78 q	0,0
Пятикратный ряд									
3	1,65	1,51	9,3	11,81	11,84	0,2	2,40 q	2,44 q	1,6
4	1,77	1,72	2,9	20,52	20,57	0,2	2,44 q	2,47 q	1,2
5	1,89	1,88	0,5	31,85	31,88	0,1	2,49 q	2,50 q	0,1
10	2,49	2,50	0,4	131,00	131,00	0,0	2,71 q	2,71 q	0,0
14	2,98	2,98	0,0	266,62	266,62	0,0	2,89 q	2,89 q	0,0
Семикратный ряд									
3	1,79	1,49	20,2	11,93	11,79	1,2	2,44 q	2,42 q	0,8
4	1,87	1,69	10,7	20,59	20,53	0,3	2,45 q	2,46 q	0,8
5	1,95	1,86	4,8	31,77	31,75	0,1	2,47 q	2,49 q	0,8
7	2,11	2,10	0,5	61,80	61,80	0,0	2,51 q	2,51 q	0,0
10	2,36	2,36	0,0	126,68	126,68	0,0	2,56 q	2,56 q	0,0

Примечание: $q = \frac{\rho^2}{s^2}$.

Из табл. 9 видно, что изменение значений обратных весов при переходе от пятикратного к семикратному ряду не превышает 5%, поэтому семикратный ряд можно принять за эквивалент сплошной сети.

Список литературы: 1. *Кобылич А. И.* Уравнивание и оценка точности цепи квадратов трилатерации. — «Инженерная геодезия», 1972, вып. 12, с. 12—22. 2. *Кутузов Н. И.* Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», М., 1957, вып. 2, с. 87—100. 3. *Сундаков Я. А.* Геодезические работы при возведении крупных промышленных сооружений высотных зданий. М., «Недра», 1972, 360 с. 4. *Чмчян Т. Т.* Расчет точности угловых и линейных измерений при построении базисных фигур пространственных сетей высотных сборных сооружений. — «Инженерная геодезия», 1973, вып. 14, с. 58—65. 5. *Beluch Jozef.* Analiza porownawcza dokladności katowo liniowych i liniowych sieci realizacyjnych, zakładnych przy zastosowaniu dalmerzy elektromagnetycznych do pomiaru odległości. «Zesz. nauk AGH», 1970, N 263, 31—58.

Работа поступила в редколлегию 25 января 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.