УДК 528.335:528.37/38

В. А. КОВАЛЕНКО, канд. техн. наук
Львовский политехнический институт

О ПЕРЕДАЧЕ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПОСРЕДСТВОМ ИЗМЕРЕНИЯ АЗИМУТОВ И ЗЕНИТНЫХ РАССТОЯНИЙ

В настоящее время в геодезии широко применяют гироскопический метод ориентирования. С помощью гиротеодолита Ги-Б2 астрономический азимут можно определить со средней

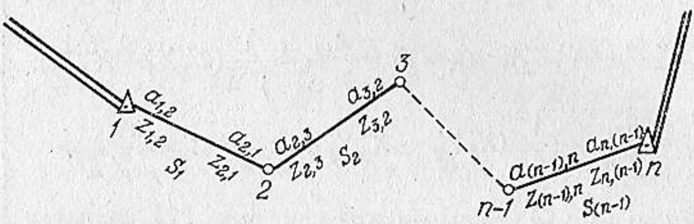

Рис. 1. Схема полигонометрического хода.

квадратической ошибкой $\pm 5''$. С такой же погрешностью измеряют и зенитные расстояния. Есть все основания ожидать дальнейшего повышения точности обоих видов измерений. В связи с этим может иметь практическое значение рассмотренная в [1] задача передачи астрономических координат посредством измерения азимутов и зенитных расстояний. В качестве исходных данных примем астрономические и геодезические координаты пунктов 1 и n (рис. 1), а также азимуты базисных сторон. Измеренными будут длины сторон S полигонометрии или ходовой линии, соединяющей пункты 1 и n, а также зенитные расстояния z и астрономические азимуты a, полученные для каждой стороны хода в прямом и обратном направлениях.

С помощью исходных и измеренных величин можно найти приближенно уравненные геодезические и астрономические координаты промежуточных пунктов 2, 3, ..., $n-1$, а затем и слагающие уклонений отвесных линий ξ и η. В горных районах определение ξ и η с погрешностью ± 2—$3''$ позволит с достаточной точностью выполнить необходимое для геодезических измерений 2 кл. проектирование измеренных величин на поверхность референц-эллипсоида.

Остановимся на методе передачи астрономических координат с исходного пункта на определяемый, например, с пункта 1 на пункт 2. Запишем очевидные соотношения между широтами и долготами двух пунктов:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi; \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda.$$

В дальнейшем искомыми величинами будем считать разности $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ координат определяемого и исходного пунктов. Для их нахождения воспользуемся рис. 2, на котором представлено взаимное расположение больших кругов на вспомогательной сфере. Точки P, Z_1, Z_2, $1'$, $2'$ получены сечением сферы линиями, проведенными через ее центр параллельно оси мира, направлениям отвеса и хорде, соединяющей пункты 1 и 2. PZ_1, PZ_2 — астрономические меридианы названных пунктов, $1'Z_12'$, $1'Z_22'$ — взаимные вертикалы.

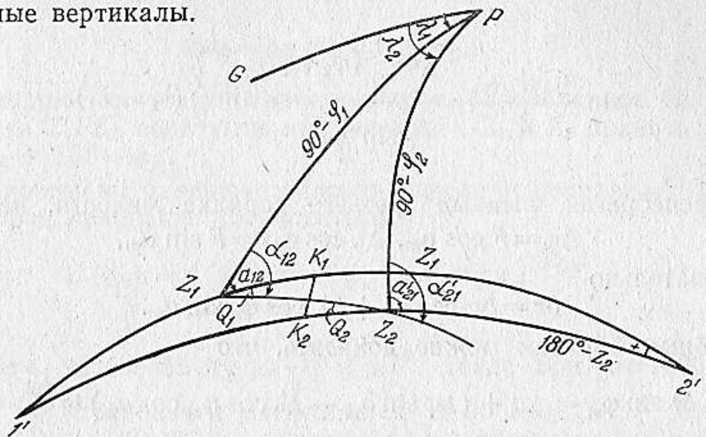

Рис. 2. К выводу формул для вычисления $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$.

Из треугольника $Z_12'Z_2$ по формуле синуса полуразности углов сферического треугольника получим

$$\cos = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}[(z_1 + z_2) - 180°]}{\sin\frac{1}{2}F} \cos\frac{1}{2} f, \tag{1}$$

где $F = \smile Z_1Z_2$.

Введем обозначение

$$\delta z = (z_1 + z_2) - 180°. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что в первом приближении δz есть проекция дуги Z_1Z_2 на один из вертикалов $1'Z_12'$ или $1'Z_22'$.

Упростим формулу (1), воспользовавшись разложениями в ряд тригонометрических функций малых углов. Члены третьего порядка малости применительно к триангуляции 2 кл. выражаются тысячными долями секунды. Они могут быть опущены без ущерба точности вычисления астрономических координат $(0{,}1-1'')$. Тогда $\delta z = F\cos\frac{Q_1+Q_2}{2}$. Если принять, что $\alpha_{12} = a_{12} + Q_1$ и $\alpha'_{21} = a'_{21} + Q_2$ — азимуты дуги Z_1Z_2, то

$$\frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{\alpha_{12} + \alpha'_{21}}{2} - \frac{a_{12} + a'_{21}}{2} = \alpha_m - a_m,$$

поэтому $\delta z = F\cos\alpha_m\cos a_m + F\sin\alpha_m\sin a_m$.

Далее из треугольника PZ_1Z_2

$$\cos\frac{\alpha_{12}+\alpha'_{21}}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}F}\cos\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1);$$

$$\sin\frac{\alpha_{12}+\alpha'_{21}}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}F}\sin\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1).$$

Пренебрегая членами третьего порядка малости, находим

$$\Delta\varphi=F\cos\alpha_m,\ \Delta\lambda\cos\varphi_m=F\sin\alpha_m,$$

следовательно

$$\delta z=\Delta\varphi\cos a_m+\Delta\lambda\cos\varphi_m\sin a_m. \tag{3}$$

Подобным образом можно доказать, что

$$\Delta\lambda\sin\varphi_m=\Delta a+(\Delta\varphi\sin a_m-\Delta\lambda\cos\varphi_m\cos a_m)\operatorname{tg}\frac{\Delta z}{2}, \tag{4}$$

где $\varphi_m=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$; $\Delta a=(a_{21}\pm 180°)-a_{12}$; $\Delta z=z_2-z_1$.

Уравнения (3) и (4) используем в качестве исходных для определения разностей $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$. Но прежде заметим, что в формуле (4) выражение в скобках определяет угловое расстояние K_1K_2 между взаимными вертикалами в средней точке дуги Z_1Z_2, а угол $\frac{\Delta z}{2}$ равен среднему значению углов наклона хорды в пунктах 1 и 2. Дуга K_1K_2 зависит от величины изменения уклонений отвеса. Обычно она не превышает 5″, но в некоторых горных районах достигает 30″, а иногда и больше. Поэтому в зависимости от изменения уклонений отвеса и угла наклона хорды второй член правой части уравнения (4) может иметь значения от малых долей секунды до 1″ и более.

Если этой погрешностью можно пренебречь, то разность долгот вычислим по формуле

$$\Delta\lambda=\Delta a\operatorname{cosec}\varphi_m. \tag{5}$$

Решая уравнения (3) и (4), получаем:

$$\Delta\lambda\cos\varphi_m=\frac{\delta z\sin a_m\operatorname{tg}\frac{\Delta z}{2}+\Delta a\cos a_m}{\operatorname{tg}\frac{\Delta z}{2}+\operatorname{tg}\varphi_m\cos a_m}; \tag{6}$$

$$\Delta\varphi=\frac{\delta z-\Delta\lambda\cos\varphi_m\sin a_m}{\cos a_m}. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7), а в некоторых случаях и (5), могут служить рабочими для передачи астрономических координат. Входящую в них величину φ_m достаточно определить из выражения

$$\varphi_m = \varphi_1 + \frac{\Delta\varphi_0}{2},$$

где

$$\Delta\varphi_0 = \Delta a \operatorname{ctg} a_m \operatorname{ctg} \varphi_1, \tag{8}$$

приближенное значение разности широт, определяемое из треугольника Z_1PZ_2, если углы при вершинах Z_1 и Z_2 принять равными a_{12} и $180° - a'_{21}$.

Установим выгоднейшие условия передачи координат. Дифференцируя уравнение (5), находим

$$d(\Delta\lambda) = d(\Delta a) \operatorname{cosec} \varphi_m - \Delta\lambda \operatorname{ctg} \varphi_m \frac{d\varphi_m}{\rho''}.$$

Потребуем, чтобы $\Delta\lambda \operatorname{ctg} \varphi_m \frac{d\varphi_m}{\rho} \leqslant 0{,}1''$. Тогда при $\lambda = 1000''$ и $\varphi_m = 45°$ это требование выполняется, если $d\varphi_m \leqslant 20{,}6''$. Такая точность определения φ_m надежно обеспечивается формулами (8). Опуская по малости второй член в правой части равенства, будем иметь

$$d(\Delta\lambda) = d(\Delta a) \operatorname{cosec} \varphi_m. \tag{9}$$

Выполнив дифференцирование уравнения (6) и опустив члены с $\frac{d\varphi_m}{\rho}$, $\frac{da_m}{\rho}$ $\frac{d(\Delta z)}{\rho}$, выражающиеся в десятых долях секунды, получим

$$d(\Delta\lambda) \cos \varphi_m = \frac{d(\delta z) \sin a_m \operatorname{tg} \frac{\Delta z}{2} + d(\Delta a) \cos a_m}{\operatorname{tg} \frac{\Delta z}{2} + \operatorname{tg} \varphi_m \cos a_m}. \tag{10}$$

При углах наклона до 6° $\operatorname{tg} \frac{\Delta z}{2}$ не превышает $0{,}1''$. Вследствие этого влияние погрешностей в измерении зенитных расстояний ослабляется в 10 и более раз, а при a_m, меньших $\pm 45°$ или $180° \pm 45°$, точность определения разности долгот практически зависит только от погрешностей измерения азимутов.

Если в выражении (10) положить $\operatorname{tg} \frac{\Delta z}{2} = 0$, то придем к формуле (9), которую в дальнейшем будем применять для уравнивания и оценки точности разности долгот. Переходя к средним квадратическим ошибкам, получаем:

$$m_{\Delta\lambda} = \pm m_{\Delta a} \operatorname{cosec} \varphi_m. \tag{11}$$

Для того, чтобы обеспечить в средних широтах (30—80°) значение $|m_{\Delta\lambda}| \leqslant 3''$, потребуются измерения азимута со средней квадратической ошибкой $m_a = \pm 1''$, т. е. в пять раз точнее результата, даваемого гиротеодолитом Ги-Б2.

Дифференцируя уравнение (7) по $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, δz и полагая при этом, что в пределах рассматриваемых условий φ_m и a_m постоянны, находим $d(\Delta\varphi)\cos a_m = d(\delta z) - d(\Delta\lambda)\cos\varphi_m \sin a_m$, а с учетом формулы (9)

$$d(\Delta\varphi) = \frac{d(\delta z)}{\cos a_m} - d(\Delta a)\operatorname{ctg}\varphi_m \operatorname{tg} a_m. \qquad (12)$$

Переход к средним квадратическим ошибкам приводит к выражению

$$m_{\Delta\varphi}^2 = \left(\frac{m_{\delta z}}{\cos a_m}\right)^2 + (m_{\Delta a}\operatorname{ctg}\varphi_m \operatorname{tg} a_m)^2. \qquad (13)$$

Отсюда заключаем, что ошибка в передаче широты, обусловленная ошибками измерения зенитных расстояний и азимутов, зависит от широты и азимута направления, по которому передаются координаты. Выгоднейшим будет направление, совпадающее с меридианом. Тогда $m_{\Delta\varphi} = \pm m_{\delta z}$. Очевидно, что для получения широты с ошибкой ± 2—$3''$ необходимо измерять зенитные расстояния с погрешностью около $\pm 1''$.

Таблица 1

Полученные результаты разности широт

Направления	a_m	$\frac{\Delta z}{2}$	$\Delta\varphi_н$ из наблюдений	$\Delta\varphi_в$ по формуле (7)	$\Delta = \Delta\varphi_в - \Delta\varphi_н$	$m_{\Delta\varphi}$ по формуле (13)
1—5	21°47′	2°32′	176,92″	177,13″	+ 0,21″	± 7,54″
1—6	75°41′	1°53′	122,13″	132,54″	+10,41″	±17,04″
4—3	6°51′	1°38′	322,80″	327,72″	+ 4,92″	± 7,05″
4—5	48°06′	0°06′	299,05″	313,88″	+14,83″	±10,51″

По материалам измерений на эталонном геодезическом полигоне в Карпатах старший инженер Цмыкал Л. И вычислила по формулам (5), (6) и (7) разности долгот и широт четырех пар пунктов триангуляции. На всех пунктах были выполнены астрономические наблюдения. Широты, долготы и азимуты получены с первоклассной точностью:

$$M_\varphi = \pm 0{,}3'', \quad M_\lambda = \pm 0{,}45'', \; M_a = \pm 0{,}5''.$$

Зенитные расстояния измеряли со средней квадратической ошибкой $m_z = \pm 5$—$7''$. Изменения уклонений отвеса не превышали 5″.

При вычислении помещенных в табл. 1, 2 значений $m_{\Delta\varphi}$ и $m_{\Delta\lambda}$ было принято, что $m_{\delta z} = \pm 5''\sqrt{2} = \pm 7''$, $m_{\Delta a} = \pm 0{,}5''\sqrt{2} =$

$=\pm 0{,}7''$. Данные табл. 1 свидетельствуют о зависимости точности передаваемой широты от азимута выбранного для этой цели направления. Не следует выбирать для передачи координат направления, уклоняющиеся от меридиана более чем на 30°. Завышенные значения всех четырех разностей $\Delta\varphi_в$ можно объяснить наличием систематической погрешности в зенитных расстояниях, вследствие которой суммы (z_1+z_2) оказались преувеличенными примерно на $5''$.

Таблица 2

Полученные результаты разности долгот $\Delta\lambda$

Направления	$\Delta\lambda_н$ из наблюдений	$\Delta\lambda_в$ по формуле (6)	По формуле (5)	$\Delta=\Delta\lambda_в-\Delta\lambda_н$	$m_{\Delta\lambda}$ по формуле (11)
1—5	103,77″	104,75″	104,83″	+0,98″	±0,93″
1—6	393,84″	391,37″	390,74″	—2,47″	±0,93″
4—3	59,94″	60,94″	60,98″	+1,00″	±0,93″
4—5	497,61″	495,13″	495,09″	—2,48″	±0,93″

Приведенные в табл. 2 данные подтверждают, что при малых углах наклона линий, соединяющих пункты, и при $a_m \leqslant 45°$ формулы (5) и (6) дают один и тот же результат, а точность передачи долготы определяется точностью измерения азимутов.

Рассмотрим теперь порядок передачи астрономических координат на промежуточные пункты высотно-азимутального хода, представленного на рис. 1.

Допустим, что разности долгот и широт смежных пунктов вычисляли по формулам:

$$\Delta\lambda_в = \Delta a \operatorname{cosec} \varphi_m; \; \Delta\varphi_в = \frac{\delta z}{\cos a_m} - \Delta a \operatorname{ctg} \varphi_m \operatorname{tg} a_m.$$

Аргументы Δa и δz, определяемые непосредственно через измеренные величины, будем считать независимо измеренными. Поскольку ход проложен между двумя твердыми пунктами, возникает задача уравнивания: Δa_i и δz_i должны удовлетворять двум условным координатным уравнениям. Эти уравнения, выражающие условия долгот и широт, можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^{n-1} v_a \operatorname{coses} \varphi_m + W_\lambda = 0; \\ &\sum_1^{n-1} \frac{v_z}{\cos a_m} - v_a \operatorname{ctg} \varphi_m \operatorname{tg} a_m W_\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Здесь v_a и v_z — поправки из уравнивания к Δa и δz, $W_\lambda = \sum_1^{n-1} \Delta\lambda_в - (\lambda_n - \lambda_1)$, $W_\varphi = \sum_1^{n-1} \Delta\varphi_в - (\varphi_n - \varphi_1)$.

Таблица 3

Передача координат по сторонам полигонометрии

Направления	Разности широт					Разности долгот				
	$\Delta\varphi_в$	v_φ	$\Delta\varphi_{ур}$	$\Delta\varphi_н$	$\Delta\varphi=\Delta\varphi_{ур}-\Delta\varphi_н$	$\Delta\lambda_в$	v_λ	$\Delta\lambda_{ур}$	$\Delta\lambda_н$	$\Delta\lambda=\Delta\lambda_{ур}-\Delta\lambda_н$
$1—П_1$	−61,6	+4,0″	−57,6″	−47,89″	−9,7″	+23,4″	+2,8″	+26,2″	+36,46″	−10,3″
$П_1—П_3$	−85,3	+2,8″	−82,5″	−86,19″	+3,7″	+15,0″	+1,9″	+16,9″	+21,75″	−4,9″
$П_3—5$	−41,9	+5,0″	−36,9″	−42,97″	+6,1″	+57,4″	+3,3″	+60,7″	+45,57″	+15,1″

Уравнительные вычисления будут выполняться в такой последовательности:

а) вычисление разностей $\Delta\lambda_в$ и $\varphi_в$ с помощью измеренных азимутов и зенитных расстояний по формулам (5) или (6) и (7);

б) составление условных уравнений по формулам (14);

в) переход к нормальным уравнениям и их решение;

г) вычисление поправок v_a и v_z;

д) вычисление поправок v_λ, v_φ и определение уравненных разностей координат:

$$v_\lambda = v_a \operatorname{cosec}\varphi_m; \quad v_\varphi = \frac{v_z}{\cos a_m} - v_a \operatorname{ctg}\varphi_m \operatorname{tg} a_m;$$

$$\Delta\lambda_{ур} = \Delta\lambda_в + v_\lambda; \quad \Delta\varphi_{ур} = \Delta\varphi_в + v_\varphi;$$

е) определение уравненных координат промежуточных пунктов:

$$\lambda_i = \lambda_1 + \sum_1^i \Delta\lambda_{ур}, \quad \varphi_i = \varphi_1 + \sum_1^i \Delta\varphi_{ур}.$$

В порядке эксперимента на эталонном полигоне между пунктами триангуляции 1 и 5 был проложен ход полигонометрии, в конечных и двух промежуточных точках которого гиротеодолитом Ги-Б2 измерялись астрономические азимуты. Точность измерений — ±5″. Азимуты сторон хода колебались в пределах от 11 до 34°. Кроме того, на обоих промежуточных пунктах полигонометрии по программе 1 класса были определены астрономические широты и долготы. Зенитные расстояния измеряли оптическим теодолитом ОТ-02 и получили с погрешностью ±5″. Углы наклона линий хода имели значения 7°03′, 6°26′ и 8°38′.

Вычисления выполняли по описанной выше схеме. Разность долгот находили по формуле (6). Результаты обработки измерений сведены в табл. 3. Табличные значения $\Delta\varphi_н$ и $\Delta\lambda_н$ получены из первоклассных наблюдений и могут быть приняты за истинные. Нетрудно заметить, что точность уравненных разностей координат согласуется с точностью измеренных величин.

Следовательно, при передаче астрономических координат посредством измерения азимутов и зенитных расстояний широты получаются в 1,5—2 раза грубее зенитных расстояний, а долготы — в 1,5—2 раза грубее измеренных азимутов. Эти данные соответствуют выгоднейшему выбору ходовой линии, которая в данном случае должна располагаться вдоль меридиана.

Список литературы: 1. *Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Некоторые вопросы обработки пространственных сетей. — «Тр. ЦНИИГАиК» 1966, вып. 171, с. 8—10.

Работа поступила в редколлегию 21 декабря 1976 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.