УДК 528.281

В. М. КРАСНИКОВ
Усть-Каменогорский политехнический институт

НАБЛЮДЕНИЯ, ПРИВЕДЕННЫЕ К ОДНОМУ КРУГУ СКЛОНЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ШИРОТЫ ПО СПОСОБУ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЧАСОВЫХ УГЛОВ

В 1935 г. итальянский астроном П. Сконцо [7] предложил определять широту по измерениям зенитных расстояний двух звезд с близкими прямыми восхождениями при условии, что их часовые углы равны, т. е. $t=t_N=t_S$. В дальнейшем этот способ был развит в работах Г. С. Зырянова и А. В. Буткевича [1]. Рассмотрим вопрос о приведении наблюдений к одному кругу склонений, так как от этого в значительной степени зависит точность вычисления широты.

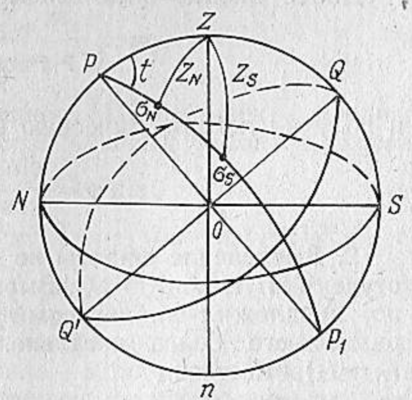

Рис. 1. Наблюдения двух звезд в соответствующих часовых углах.

1. Вычисление широты по способу Сконцо. П. Сконцо использовал (рис. 1) формулы:

$$\cos z_N = \sin\varphi \cdot \sin\delta_N + \cos\varphi \cdot \cos\delta_N \cos t_N; \qquad (1)$$

$$\cos z_S = \sin\varphi \cdot \sin\delta_S + \cos\varphi \cdot \cos\delta_S \cos t_S. \qquad (2)$$

Приравнивая $\cos t_N$ и $\cos t_S$, он получил выражение

$$\sin\varphi = \frac{\cos z_N \cos\delta_s - \cos z_s \cos\delta_N}{\sin(\delta_N - \delta_s)}. \qquad (3)$$

Как видно, в формулу (3) не входят часовые углы и отсчеты хронометра. Равенства часовых углов П. Сконцо добивался,

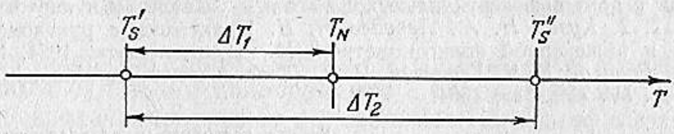

Рис. 2. К интерполированию высоты южной звезды.

приводя два измеренные зенитные расстояния южной звезды к часовому углу $t'_S = t_N$ северной звезды путем линейного интерполирования их по времени. Для этого он при каждом круге производил три наблюдения: [z'_S, z_N и z''_S] (рис. 2). Назовем такую программу полной.

Для интерполирования П. Сконцо применял формулу

$$\Delta z = z_S - z'_S = \frac{\Delta z_{12}\,\Delta T_1}{\Delta T_{12}}; \qquad (4)$$

где $$\Delta T_1 = t_N - t_s = (T_N - T'_s) - (\alpha_N - \alpha_S) = \Delta T - \Delta\alpha; \qquad (5)$$

$$\Delta z_{12} = z''_s - z'_s; \quad \Delta T_{12} = T''_s - T'_s. \qquad (6)$$

Далее Сконцо ввел вспомогательный угол μ

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\cos z_s \cos\delta_N}{\cos z_N \sin\delta_s} \qquad (7)$$

и получил логарифмическую формулу

$$\sin\varphi = \frac{\sin h_N \cos(\mu + \delta_s)}{\cos\mu \sin(\delta_N - \delta_s)}. \qquad (8)$$

2. Вычисление широты по формулам Г. Зырянова. В 1940 г. студент НИИГАиК Г. С. Зырянов [1], независимо от П. Сконцо, предложил аналогичный способ определения широты, но развил его более детально. Основная формула у него (при $t_N = t_S$) имеет вид

$$\sin\varphi = \frac{\cos z_N \cos\delta_S - \cos z_S \cos\delta_N}{\sin(\delta_N - \delta_S)} = k_S \cos z_N - k_N \cos z_S. \qquad (9)$$

где $k_S = \cos\delta_S \operatorname{cosec}(\delta_N - \delta_S)$ и $k_N = \cos\delta_N \operatorname{cosec}(\delta_N - \delta_S)$. (10)

Если же $\alpha_S = \alpha_N \pm 12^h$ и $t_S = t_N \pm 12^h$, то

$$\sin\varphi = \frac{\cos z_N \cos\delta_S + \cos z_S \cos\delta_N}{\sin(\delta_N + \delta_S)}. \tag{11}$$

Как показал Зырянов [1], основное требование $\Delta t = 0$ проще выполняется, если поставить условие не $T_2 = T_1$ и $\alpha_2 = \alpha_1$, а

$$\Delta T = T_N - T_S = \alpha_N - \alpha_S. \tag{12}$$

Интервал $T_N - T_S$ по возможности не должен превышать 5—10^m. Поэтому нужно подбирать в паре такие звезды, чтобы разность $\Delta\alpha$ была равна 5—10^m.

Для определения выгоднейших условий наблюдений Г. Зырянов продифференцировал формулы (9) и (11) по φ и z, считая α и δ безошибочными, и, перейдя к средним квадратическим ошибкам, нашел

$$m_\varphi^2 = \frac{(\sin^2 z_N \cdot \cos^2\delta_S \cdot m_{z_N}^2 + \sin^2 z_s \cdot \cos^2\delta_N m_{z_S}^2)}{\sin^2(\delta_N \pm \delta_S)\cos^2\varphi}. \tag{13}$$

Из анализа формулы (13) ясно, что ошибка m_φ минимальна при $\delta_N \pm \delta_S = 90°$. Кроме того, желательно, чтобы $\delta_N \simeq 90°$ и $\delta_S \to 0°$. Значит, одной из звезд должна быть Полярная.

Если $\delta_N + \delta_S = 90°$ и $m_{z_N} = m_{z_S}$, то

$$m_\varphi = \frac{\sqrt{\sin^2 z_N \cdot \cos^2\delta_S + \sin^2 z_S \cdot \cos^2\delta_N}\, m_z}{\cos\varphi}. \tag{14}$$

Если же $\delta_N \simeq 90°$ и $\delta_S \simeq 0°$, то

$$m_\varphi = \frac{\sin z_N \cdot m_z}{\cos\varphi} \approx m_z. \tag{15}$$

Для случая $\Delta t \neq 0°$ Г. Зырянов [1] предложил вводить в широту поправку за неравенство часовых углов по формуле

$$\delta\varphi_{\Delta t} = k \cdot \sin t_N \Delta t, \tag{16}$$

где $k = 15\, k_S \cos\delta_N$ и $\Delta t = (T_N - T_S) - [(\alpha_N - \alpha_S)(\pm 12^h)]$. (17)

Формула (16) получена путем дифференцирования формулы (9) по φ, z_S, z_N и замены dz_N и dz_S на $15\cos\varphi \cdot \sin a\, dt$.

Если ошибка $\delta\varphi$ задана, то из формулы (16) можно найти допустимую ошибку в интервале наблюдений. Так, для пары Полярная—ε Кассиопеи, задавшись ошибкой широты $\delta\varphi \leqslant \pm \pm 0{,}5'$ при $k = 0{,}21$ и $t = 6^h$, Г. Зырянов получил $\delta(T_N - T_S) \leqslant \leqslant 2{,}3^m$, а при $t = 30^m$—$\delta(T_N - T_S) \leqslant 18{,}4^m$; при $\delta\varphi \leqslant \pm 0{,}5'$ и $t = 6^h$,

$\delta(T_N - T_S) \leqslant 2{,}3^m$, а при $t = 30^m \delta(T_N - T_S) \leqslant 18{,}4^s$. Значит, приближенные определения можно проводить без часов, а при точных определениях — пользоваться карманными часами.

Если поправка хронометра u неизвестна и нельзя в (16) вычислить t, то можно, используя формулу И. В. Зубрицкого

$$a = \sqrt{\Delta_N^2 - (\varphi - h_N)^2} \operatorname{coses} z_N = \Delta_N \cdot \sin t_N \operatorname{cosec} z_N, \qquad (18)$$

получить формулу

$$\delta\varphi''_{\Delta t} = \frac{15\, k_s \sqrt{\Delta_N'' - (\varphi - h_N)''}\ \Delta t^s}{\rho''}. \qquad (19)$$

3. Вычисление широты по способу А. В. Буткевича. В 1947 году А. В. Буткевич [1] предложил определять совместно широту, поправку часов и азимут. Для этого надо дополнительно при наблюдениях Полярной отсчитывать горизонтальный круг и при наблюдении южной звезды — часы, а если выполняются точные наблюдения, то отсчет хронометра или часов производить и при наблюдении Полярной:

Объект	Отсчеты	КП	Объект	Отсчеты	КЛ
Земной пр.	—	Г. кр.	Земной пр.	—	Г. кр.
Полярная	В. кр.	Г. кр.	Полярная	В. кр.	Г. кр.
Вспом. зв.	Часы	В. кр.	Вспом. зв.	Часы	В. кр.
Полярная	В. кр.	Г. кр.	Полярная	В. кр.	Г. кр.
Земной пр.	—	Г. кр.	Земной пр.	—	Г. кр.

Интервал времени между наблюдениями должен удовлетворять условию

$$T_S^m = \frac{1}{2}(T'_S + T''_S) = T_N^m - \Delta\alpha = \frac{1}{2}(T'_N + T''_N) - \Delta\alpha, \qquad (20)$$

т.е. $$(T''_S - T''_N) = (T'_S - T'_N) - 2\,\Delta\alpha, \text{ или } \Delta T_{12} = \Delta T_1 - 2\,\Delta\alpha, \qquad (21)$$

или $$(T''_S - T''_N) = (T'_S - T'_N) - 2\,(\alpha_N - \alpha_S \pm 12^h), \qquad (22)$$

где $\Delta T_1 = (T'_S - T'_N)$ — интервал наблюдений между Полярной и вспомогательной звездой, а $\Delta T_2 = (T''_S - T''_N)$ — искомый интервал наблюдений между звездой и Полярной (рис. 3) при другом положении круга.

Программу наблюдений мы составляли так, что при малых $\Delta\alpha$ условие $\Delta t = 0$ выполнялось при каждом круге, для чего производилось по три наблюдения при КП и КЛ (рис. 3, *б*), а при большой разности $\Delta\alpha$ — по два наблюдения (рис. 3, *а*). В последнем случае условие $\Delta t = 0$ выполнялось лишь для всего приема.

В своей работе Сконцо допустил методические неточности:

а) не исследовал влияние ошибок измерения высот звезд на ошибку широты (а оно, как показал Г. Зырянов [1], зависит от склонений звезд) и неудачно строил программу наблюдений;

б) не учитывал ускорения звезд по высоте, которое ощутимо, особенно для южной звезды (см. ниже формулу (37);

в) дважды наблюдал южную звезду, тогда как точнее надо получать z_N и дважды наблюдать северную звезду (ее высоту легче интерполировать);

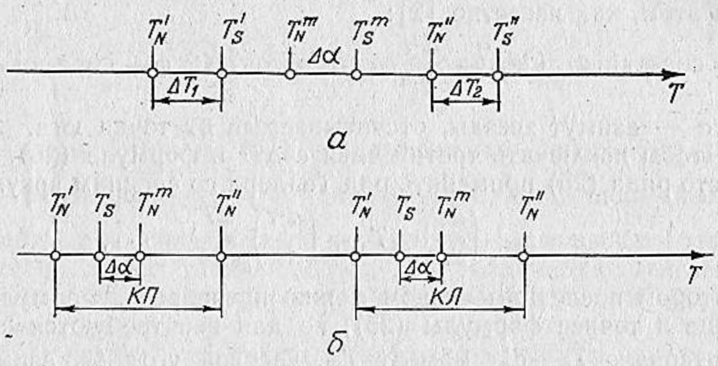

Рис. 3. Сокращенная программа наблюдений (*а*); полная программа наблюдений (*б*).

г) не использовал наблюдений Полярной, хотя она имеет ряд преимуществ перед другими звездами.

Покажем пути устранения недостатков способа П. Сконцо.

а. Исходя из заданной ошибки $\delta\varphi$, рассчитаем, с какой точностью нужно измерять зенитные расстояния звезд. Чтобы иметь определенное решение, применим принцип равных влияний [6]. При этом необходимо, чтобы влияние ошибок измерения зенитных расстояний обеих звезд на ошибку широты было одного порядка.

Тогда согласно формуле (13)

$$\frac{\sin z_N \cos \delta_S m_{zN}}{\sin (\delta_N \pm \delta_s) \cos \varphi} = \frac{\sin z_S \cos \delta_N m_{zS}}{\sin (\delta_N \pm \delta_S) \cos \varphi} = \frac{m_\varphi}{\sqrt{2}}. \qquad (23)$$

Отсюда

$$m_{zN} = \frac{\sin (\delta_N \pm \delta_S) \cos \varphi m_\varphi}{\sqrt{2} \sin z_N \cos \delta_S} \quad \text{и} \quad m_{zS} = \frac{\sin (\delta_N \pm \delta_S) \cos \varphi \cdot m_\varphi}{\sqrt{2} \sin z_S \cos \delta_N}. \qquad (24)$$

При $m_\varphi = \pm 1''$, $\varphi = 50°$, $\delta_N = 89°$, $\delta_S = 42°$ (пара α *UMi* — γ *And*), $z_S = 50°$ и $z_N = 39°$ получаем ошибки $m_{z_N} = \pm 0{,}6''$ и $m_{z_S} = \pm 26''$.

Как видим, зенитное расстояние южной звезды можно измерять грубее, чем зенитное расстояние Полярной, поэтому программу наблюдений нужно строить так, чтобы Полярная наблюдалась большее число раз, чем южная звезда.

б. Вследствие неравномерного перемещения звезды σ_S по высоте, ее интерполированное линейное зенитное расстояние $z_S^0 = z_S' + \Delta z$ отличается от истинного зенитного расстояния z_S, соответствующего равенству часовых углов. Разложение в ряд Тейлора с начальным аргументом дает

$$z = z_1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_1 \Delta T_1 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_1 \frac{\Delta T_1^2}{2} + \left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)_1 \frac{\Delta T_1^3}{6} + \cdots. \quad (25)$$

При этом, как известно [2]:

$$\frac{dz}{dt} = \cos\varphi \sin a, \quad (26) \qquad \frac{d^2t}{dt^2} = \cos^2\varphi \cos a\,(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg} z \cos a), \quad (27)$$

где a — азимут звезды, отсчитываемый от точки юга.

Чтобы исключить третий член с ΔT^2 в формуле (25), нужно вместо ряда (25) применить ряд Тейлора со средним аргументом

$$z = z_1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_m \Delta T_1 + \left(\frac{d^3t}{dt^3}\right)_m \frac{\Delta T_1^3}{24} + \cdots, \quad (28)$$

в котором последним членом можно пренебречь. Формула (28) проще и точнее формулы (25), но для нее требуются средние в интервале $\bar{T}_S - T_S'$ момент T_m, часовой угол t_m, азимут a_m и зенитное расстояние z_m, которые можно получить по формулам:

$$T_m = \frac{1}{2}(T_s' + \bar{T}_s) = T_s' + \frac{\Delta T_1}{2}; \quad (29) \qquad t_m = T_m + u - \alpha; \quad (30)$$

$$\sin a_m = \sin t_m \cos\delta_s \operatorname{cosec} z_m; \quad (31) \qquad z_m = \frac{1}{2}(z_s' + \bar{z}_S). \quad (32)$$

В формуле (29) $\bar{T}_S$ — момент, в который надо было бы наблюдать южную звезду, чтобы $t_S' = t_N$; $\bar{z}_S$ — зенитное расстояние, соответствующее этому моменту.

Поскольку при этом необходимы сложные вычисления, выберем другой путь. Если для получения Δz использовать формулу интерполирования со вторыми разностями, то получим

$$\Delta z = \Delta' z_{12} n + \Delta'' z_{12} \frac{n(n-1)}{2} + \cdots, \quad (33)$$

где коэффициент интерполирования $n = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_{12}}$, а вторая разность $\Delta'' z_{12} \approx \frac{d^2z}{dt^2} \Delta T_{12}^2$. Поэтому

$$\Delta z = \Delta z_{12} \frac{\Delta T_1}{\Delta T_{12}} + \frac{\Delta T_1 (\Delta T_1 - \Delta T_{12})}{2} \frac{d^2z}{dt^2} + \cdots. \quad (34)$$

Очевидно, второй член формулы (34) и есть поправка за ускорение звезды по высоте. Формула (34) гораздо проще формул (25) и (28).

в. Чтобы показать, что выгоднее наблюдать два раза северную звезду, перепишем по С. Блажко [2] формулу (27) так, чтобы в нее входило склонение δ

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \sin\varphi\cos\varphi\cos a + \cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,z\cos^2 a, \tag{35}$$

или
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \cos\varphi\cos a\,\frac{(\sin\varphi\sin z + \cos\varphi\cos z\cos a)}{\sin z}, \tag{36}$$

или
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\cos\varphi\cos a\cos\delta\cos q}{\sin z}. \tag{37}$$

Анализ формулы (37) показывает, что при $\delta\to 90^\circ$ и $q\to 90^\circ$, $\frac{d^2z}{dt^2}\to 0$. Из формулы (37) видно, что для близполюсных звезд ускорение по высоте будет меньше, чем для южных, поэтому в способе Сконцо также следует два раза наблюдать северную звезду, а не южную, и интерполировать зенитное расстояние северной звезды.

г. Покажем, что выгоднее наблюдать южную звезду в паре с Полярной. Нетрудно доказать, что ускорение Полярной по высоте мало. Действительно, для Полярной $\cos a_N \cong -1$ и в формуле (27)

$$\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{ctg}\,z_N\cos a_N = \mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,h_N \approx (\varphi - h_N)\sec^2\varphi \tag{38}$$

и
$$\frac{d^2z}{dt^2} \approx \cos^2\varphi\cdot\cos a\,(\varphi - h_N)\sec^2\varphi \approx (\varphi - h_N). \tag{39}$$

Поэтому согласно формуле (25) поправка за ускорение Полярной в интервале ΔT_{12} примет вид

$$\delta^2 z''_{N_{12}} = -\frac{15^2(\varphi - h_N)''\Delta T_{12}^{s^2}}{2\rho''^3}, \tag{40}$$

где ΔT_{12} — интервал между наблюдениями Полярной (см. таблицу).

Поправка $\delta^2 Z''_N$ при различных значениях ΔT и $(\varphi - h_N)$

$\varphi - h_N$	ΔT									
	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m	8^m	9^m	10^m
$+0'$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$	$\pm 0{,}00''$
$\pm 10'$	$0{,}01''$	$0{,}02''$	$0{,}05''$	$0{,}09''$	$0{,}14''$	$0{,}21''$	$0{,}28''$	$0{,}37''$	$0{,}46''$	$0{,}57''$
$\pm 20'$	$0{,}02''$	$0{,}04''$	$0{,}10''$	$0{,}18''$	$0{,}29''$	$0{,}41''$	$0{,}56''$	$0{,}73''$	$0{,}92''$	$1{,}40''$
$\pm 30'$	$\pm 0{,}03''$	$0{,}07''$	$0{,}15''$	$0{,}27''$	$0{,}43''$	$0{,}62''$	$0{,}84''$	$1{,}10''$	$1{,}39''$	$1{,}74''$
$\pm 40'$	$\pm 0{,}04''$	$0{,}09''$	$0{,}21''$	$0{,}36''$	$0{,}57''$	$0{,}82''$	$1{,}12''$	$1{,}46''$	$1{,}85''$	$2{,}28''$
$\pm 50'$	$\pm 0{,}05''$	$0{,}11''$	$0{,}26''$	$0{,}47''$	$0{,}71''$	$1{,}03''$	$1{,}40''$	$1{,}82''$	$1{,}31''$	$2{,}85''$

Поправку $\delta^2\varphi = -\delta^2 z_N^*$ можно вводить в φ или z_N.

Тогда формула (34) поправки в зенитное расстояние Полярной, вычисленное методом линейного интерполирования по Сконцо, примет вид

$$\delta^2 z_N'' = -\frac{15^2 \Delta T_1 (\Delta T_1 - \Delta T_{12})(\varphi - h_N)''}{2\rho''^2}. \qquad (41)^{**}$$

Продифференцируем формулу (3) из работы П. Сконцо [7] по φ, z_N, z_S, δ_N, δ_S, записав ее так: $\cos\varphi \cdot \sin(\delta_N - \delta_S) = (\cos z_N \cos\delta_S - \cos z_S \cos\delta_N)$. Перейдя от дифференциалов к средним квадратическим ошибкам, при $\delta_N \approx 90°$ и $\delta_S > 0°$ найдем

$$m_\varphi^2 = \frac{(\cos z_S - \sin\varphi \cdot \sin\delta_S)^2}{\cos^2\varphi \cdot \cos^2\delta_S} m_{\delta_N}^2 + \frac{\sin^2 z_N}{\cos^2\varphi} m_{z_N}^2, \qquad (42)$$

или $$m_\varphi = \sqrt{\cos^2 t_S m_{\delta_N}^2 + m_{z_N}^2}. \qquad (43)$$

При $\delta_N = 90°$ и $\delta_S \simeq 0°$ получим такую же формулу.

Средняя квадратическая ошибка m_{z_N} измерения зенитного расстояния Полярной

$$m_{z_N} = \sqrt{m_v^2 + m_{0_N}^2 + m_{Mz}^2}, \qquad (44)$$

где m_v — средняя квадратическая ошибка визирования, которую при увеличении трубы $v = 45$ для инструмента ОТ-02 можно принять равной $\frac{45''}{v} = \pm 1''$, m_0 — средняя квадратическая ошибка влияния наклонности

$$m_u = \sqrt{2\tau^2 m_b^2 + (b_2 - b_1)\, m_\tau^2} \qquad (45)$$

(при $\tau = 1{,}5$—$3{,}0''$; $(b_2 - b_1) = 1$ дел. ур., $m_b = \pm 0{,}1$ дел., $m_\tau = \pm 0{,}1''$ она равна $\pm 0{,}4$—$0{,}5''$); m_{MZ} — средняя квадратическая ошибка определения места зенита

$$m_{Mz} = \sqrt{2m^2 + m_{\Delta z}^2}. \qquad (46)$$

Здесь m — средняя квадратическая ошибка отсчета ($\pm 0{,}7$—$1{,}0''$) и $m_{\Delta z}$ — влияние ошибки фиксации времени [4]

$$m_{\Delta z} = \frac{15\,\Delta_N'' \sin t_N \cdot m_{\Delta T}}{\rho''} \qquad (47)$$

(при $t_N = 90°$, $m_{\Delta T} = \pm 1{,}5$—$2{,}0^s$ и $\Delta_N'' = 3000''$ оно равно $\pm 0{,}2$—$0{,}3''$). В результате $m_{MZ} = \pm 1{,}0$—$1{,}3''$ [5]. Ошибки $m\delta$ склоне-

* Это следует из формулы $\varphi = h_N + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$ [4].

** Поправка за ускорение $\delta^2 z_S > \delta^2 z_N$, но ее согласно формулам (24) учитывать не надо.

ний фундаментальных каталогов составляют $\pm 0{,}15—0{,}20''$ [4], т. е. пренебрежимо малы. С учетом формулы (44) ожидаемая средняя квадратическая ошибка широты, определенной одним приемом теодолитом ОТ-02, равна $\pm 1{,}3—1{,}7''$. Результаты наблюдений подтверждают эти выводы.

Список литературы: 1. *Буткевич А. В.* Определение широты, азимута и поправки часов по способу соответствующих часовых углов. — «Труды НИИГАиК», 1947, т. 1, с. 80—89. 2. *Блажко С. Н.* Курс сферической астрономии. М., Гостехтеориздат, 1954, с. 124—127. 3. *Зубрицкий И. В.* Определение истинного азимута земного направления по измерению углов наклона Полярной звезды. Горки, Изд-во БСХА, 1929. 4. *Кузнецов А. Н.* Геодезическая астрономия. М., «Недра», 1966, с. 351—352. 5. *Кравников В. М.* Об определении места зенита по Полярной. — «Геодезия и картография», 1974, № 2, с. 29—30. 6. *Бурмистров Г. А.* Основы способа наименьших квадратов. М., Госгеолтехиздат, 1963, с. 47—48. 7. *Sconzo P.* Ueber eine geschwinde kurze Methode um Breite zu bestimmen. — «Zeitschrift für Vermessungswesen». Stutg. Jan. 1935, H. 1.

Работа поступила в редколлегию 5 января 1977 года. Рекомендована кафедрой общетехнических дисциплин Усть-Каменогорского педагогического института.