УДК 528.3

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

О ВЫГОДНЕЙШЕЙ ФОРМЕ ТРЕУГОЛЬНИКА В ТРИЛАТЕРАЦИИ

В работе [1] рассмотрена выгоднейшая форма треугольника с измеренными длинами сторон, однако при этом делались грубые предположения, применялись приближенные формулы и, следовательно, вывод получился приближенным.

Уточним результаты, приведенные в работе [1]. Пусть a, b, c — измеренные длины сторон в плоском треугольнике; α, β, γ — противолежащие углы, которые могут быть вычислены по измеренным сторонам.

Под выгоднейшей формой треугольника трилатерации [1] будем понимать такую его форму, при которой средние квадратические погрешности дирекционных углов линии a и b, вычисленных через дирекционный угол стороны c, и углы α и β будут одинаковыми и наименьшими. Легко показать, что в этом случае средние квадратические погрешности углов α и β должны тоже быть равными и наименьшими.

Напишем известные уравнения:

$$d\alpha = \frac{\rho'}{h_a}\{da - \cos\gamma\, db - \cos\beta\, dc\}; \tag{1}$$

$$d\beta = \frac{\rho''}{h_b}\{db - \cos\alpha\, dc - \cos\gamma da\}; \tag{2}$$

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta;\quad h_b = c\sin\alpha = a\sin\gamma. \tag{3}$$

На основании формул (1)—(3) легко получить

$$\left(\frac{m''_\alpha}{\rho''}\right)^2 = \left(\frac{m_a}{a}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta\sin^2\gamma} + \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 \cdot \mathrm{ctg}^2\gamma + \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 \mathrm{ctg}^2\beta; \tag{4}$$

$$\left(\frac{m''_\beta}{\rho''}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\gamma} + \left(\frac{m_a}{a}\right)^2 \cdot \mathrm{ctg}^2\gamma + \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha, \tag{5}$$

где m_α, m_β — средние квадратические погрешности углов; m_a, m_b, m_c — погрешности длин сторон треугольника.

Сравнивая выражения (4) и (5), видим, что средние квадратические погрешности углов α и β равны только тогда, когда $\alpha=\beta$, $a=b$, т. е. когда треугольник равнобедренный. В этом случае

$$\left(\frac{m''_\alpha}{\rho''}\right)^2 = (1+2\,\mathrm{ctg}^2\,2\alpha)\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 + \mathrm{ctg}^2\alpha\left(\frac{m_c}{c}\right)^2; \tag{6}$$

делая правомерное предположение, что

$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_c}{c},$$

из формулы (6) получаем

$$\left(\frac{m''_\alpha}{\rho''}\right)^2 = (1 + \mathrm{ctg}^2\alpha + 2\,\mathrm{ctg}^2\,2\alpha)\left(\frac{m_c}{c}\right)^2. \tag{7}$$

Обозначив

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha + 2\,\mathrm{ctg}^2\,2\alpha = \frac{3}{2}\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha} = Q,$$

найдем экстремальное значение Q. Для этого приравняем производную нулю:

$$\frac{dQ}{d\alpha}=\frac{3}{2}\ 2\operatorname{ctg}\alpha(-\csc^2\alpha)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}^4\alpha}\cdot 2\operatorname{ctg}\alpha(-\csc^2\alpha)=$$

$$=\operatorname{ctg}\alpha(-\csc^2\alpha)(3-\operatorname{tg}^4\alpha)=0. \qquad (8)$$

Равенство (8) возможно, когда $3-\operatorname{tg}^4\alpha=0$; $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt[4]{3}$; $\alpha=$ $=52°46'16''$.

Результаты вычислений Q следующие:

α	15°	30°	45°	50°	52°46′	60°	75°
Q	20,928	4,667	2,000	1,766	1,732	2,000	7,072

Таким образом, приходим к выводу, что выгоднейшая форма треугольника трилатерации — равнобедренный треугольник, углы которого равны 52°46′. Точно такой же формы треугольник является выгоднейшим и в триангуляции [2], где измеряют углы, а не стороны. В линейно-угловой триангуляции, если измеряют стороны и углы, выгоднейший треугольник имеет аналогичный угол, равный 72°24′ [3]. Причем в нем уравненные стороны получаются с наименьшей погрешностью, а уравненные дирекционные углы — с наибольшей. Такие треугольники можно применять на практике только по одному, когда нужно передать длину стороны или дирекционный угол только один раз. В сплошных сетях триангуляции, как известно, выгодно проектировать равносторонние треугольники.

Список литературы: 1. *Дурнев А. И.* Высшая геодезия. М., «Недра», 1967, 256 с. 2. *Красовский Ф. Н.* Избранные сочинения, т. 3, М., Геодезиздат, 1955, 812 с. 3. *Монин И. Ф.* Про найвигіднішу форму трикутника в лінійно-кутовій тріангуляції. — «ДАН УРСР. Серія Б», 1971, № 9, с. 804—807.

Работа поступила в редколлегию 12 января 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.