УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ГРАДИЕНТ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ТРЕХОСНОМ УРОВЕННОМ ЭЛЛИПСОИДЕ

В работе [1] приведена формула для вычисления вертикального градиента ускорения силы тяжести на уровенном трехосном эллипсоиде. Ниже дан подробный вывод этой формулы.

Н. Брунс показал [2], что на произвольной замкнутой вращающейся уровенной поверхности

$$-\frac{dg}{dn}=g\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+2\omega^2,$$

где g — ускорение силы тяжести; n — внешняя нормаль поверхности; R_1, R_2 — ее главные радиусы кривизны; ω — угловая скорость вращения.

Сумму главных кривизн любой поверхности находим из работы [3]

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2},$$

где E, F, G, L, M, N — коэффициенты первой и второй дифференциальных форм Гаусса, причем:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2; \; L=\frac{1}{t}\left(m_1\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+m_2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+m_3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right);$$

$$N=\frac{1}{t}\left(m_1\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+m_2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+m_3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right);$$

$$M=\frac{1}{t}\left(m_1\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+m_2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+m_3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right);$$

$$m_1=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}; \; m_2=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$m_3=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}; \quad t=\sqrt{EG-F^2}.$$

Здесь x, y, z — плоские прямоугольные координаты; u, v — криволинейные координаты (долгота и 90° минус приведенная широта).

Уравнение трехосного эллипсоида возьмем в форме

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где $a>b>c$ — полуоси эллипсоида; $x=a\cos u\sin v$; $y=b\sin u\sin v$; $z=c\cos v$.

Вычислим коэффициенты первой и второй дифференциальных форм Гаусса для трехосного эллипсоида. Сначала найдем следующие производные

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -a \sin u \sin v; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = b \cos u \sin v; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = a \cos u \cos v; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = b \sin u \cos v; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -c \sin v;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -a \cos u \sin v; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = -b \sin u \sin v; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -a \cos u \sin v; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -b \sin u \sin v; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -c \cos v;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -a \sin u \cos v; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = b \cos u \cos v; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Затем получим коэффициенты дифференциальных форм Гаусса для трехосного эллипсоида:

$$E = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) \sin^2 v; \quad F = \frac{1}{4} (b^2 - a^2) \sin 2u \sin 2v;$$

$$G = (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) \cos^2 v, + c^2 \sin^2 v;$$

$$t^2 = EG - F^2 = c^2 (a^2 \sin u + b^2 \cos^2 u) \sin^4 v + \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2 2v;$$

$$L = \frac{abc}{t} \sin^3 v; \quad M = \frac{abc}{t} \sin v; \quad M = 0.$$

Теперь легко написать формулу, по которой можно вычислить вертикальный градиент ускорения силы тяжести на уровенной поверхности трехосного эллипсоида

$$-\frac{1}{g} \cdot \frac{dg}{dn} =$$

$$= \frac{abc[a^2 \sin^2\lambda + b^2 \cos^2\lambda + (a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda) \sin^2\Theta + c^2 \cos^2\Theta] \cos^3\Theta}{[c^2 (a^2 \sin^2\lambda + b^2 \cos^2\lambda) \cos^4\Theta + \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2 2\Theta]^{3/2}} +$$

$$+ \frac{2\omega^2}{g},$$

где $\lambda = u$, $\Theta = 90° - v$.

В заключение отметим, что полученную формулу можно применять для создания теоретической модели геоида Земли, на которой обычно исследуют различные формулы и положения теории регуляризированного геоида, и для других целей.

Список литературы: 1. *Монин И. Ф.* К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1962, вып. 4, с. 101—115. 2. *Михайлов А. А.* Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. М., редбюро ГУГК, 1939, 415 с. 3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. М., Гостехиздат, 1948, 622 с.

Работа поступила в редколлегию 9 декабря 1976 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.