УДК 528.3

А. В. БУТКЕВИЧ, Т. И. ДРИБНЮК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СТОРОНЫ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

В «Темнике для изобретателей и рационализаторов» [3] имеется тема № 59 «Аналитический подсчет средней длины стороны треугольника в сети триангуляции по заданному числу пунктов» (здесь пропущено окончание фразы «и по площади сети»). До сих пор среднюю длину стороны треугольника при количестве пунктов триангуляции 30—40 определяли графически, т. е. измеряли на карте все стороны треугольников и вычисляли среднюю длину стороны. Наша задача — вывести формулу для быстрого подсчета средней стороны треугольника для любого числа пунктов, что обеспечит удобство в работе и повышение производительности труда.

Вывод формулы для простой идеальной сети. Среднюю длину стороны используют для определения числа и класса пунктов, обеспечивающих определенный участок топографической съемки, когда задается площадь, обслуживаемая одним пунктом. Кроме того, от средней длины стороны зависит средняя высота сигналов, продолжительность наблюдений на пункте, т. е. показатели стоимости и производительности геодезических работ [1].

Вначале выведем формулу для средней длины стороны в простой (без диагоналей) идеальной сети, состоящей из равносторонних треугольников со стороной a (рис. 1), с пунктами P_1, P_2, $P_3, \dots P_n$.

Чтобы вычислить площадь, обслуживаемую одним пунктом (область влияния), проведем через середины сторон треугольников перпендикуляры, которые, пересекаясь в точках K, разобьют всю площадь сети триангуляции на правильные шестиугольники и их части (по краям и углам сети).

Очевидно каждый такой шестиугольник, например $K_1K_2K_3K_4K_5K_6$, представляет область влияния одного внутреннего пункта сети, допустим P_1. Но любой из таких шестиугольников состоит из шести равных четырехугольников, а каждый треугольник сети состоит из трех таких же четырехугольников. Значит, если обозначить площадь треугольника сети S_3, а площадь, обслуживаемую одним внутренним пунктом сети (область влияния одного пункта) S_6, то

$$S_6 = 2\,S_3. \tag{1}$$

С другой стороны, площадь равностороннего треугольника со стороной a

$$S_3 = \frac{a^2 \sin 60^\circ}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}\,. \tag{2}$$

Следовательно,

$$S_6 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 0{,}866\, a^2 \tag{3}$$

и

$$a = 1{,}075 \sqrt{S_6}\,[2]. \tag{4}$$

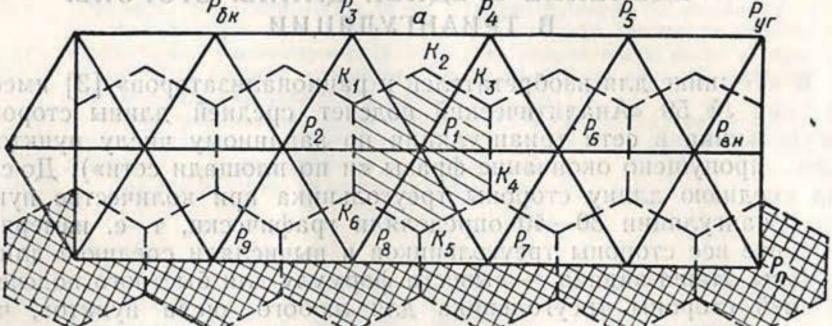

Рис. 1. Идеальная сеть и зоны влияния пунктов.

Учтем теперь, что часть пунктов, находящихся по бокам и по углам сети, обслуживает только долю площади влияния внутренних пунктов. Так, боковые пункты (например, пункты P_3, P_4, P_5) обслуживают только половину шестиугольника, а угловые — либо одну треть (при угле сети 120°, например, пункты P_3, P_7), либо одну шестую (при угле сети 60°, например, пункты P_5, P_9). Но так как в сети правильной формы угловые пункты, имеющие разные доли влияния, встречаются поровну, то можно в среднем принять, что область их влияния равна $0{,}4\,(1)\,3 + 1\,(6) = 0{,}25$, т. е. одной четверти стандартной области влияния.

Обозначим число внутренних пунктов в сети $n_{вн}$, боковых — $n_{бк}$ и угловых — $n_{уг}$. Тогда для общей площади влияния (общей площади сети) получим выражение

$$\Sigma S = 0{,}866\, a^2_{ср}\, n_{вн} + 0{,}433\, a^2_{ср}\, n_{бк} + 0{,}216\, a^2_{ср}\, n_{уг}, \tag{5}$$

или

$$\Sigma S = 0{,}866\, a^2_{ср}\, (n_{вн} + 0{,}5\, n_{бк} + 0{,}25\, n_{уг}). \tag{6}$$

Отсюда средняя длина стороны

$$a_{ср} = 1{,}075 \sqrt{\frac{\Sigma S}{(n_{вн} + 0{,}5\, n_{бк} + 0{,}25\, n_{уг}}}\,. \tag{7}$$

Вывод формулы для идеальной сети с диагоналями. Если сеть имеет диагонали d, то в результаты, получаемые по (6) и (7),

нужно вводить соответствующие поправки. Рассмотрим вначале два смежных треугольника с диагональю, т. е. геодезический четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ со стороной a (рис. 2). Средняя длина стороны в такой сети без учета диагонали $a_{ср}=5a/5=a$.
С учетом диагонали $P_1P_4=a\sqrt{3}$ получим

$$a'_{ср}=\frac{5a+a\sqrt{3}}{6}=\frac{6,73a}{6}=1,12a, \tag{8}$$

В общем случае поправка

$$\delta a = a'_{ср}-a_{ср}, \tag{9}$$

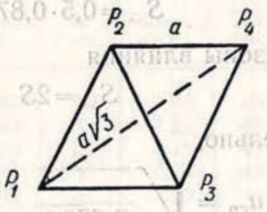

Рис. 2. Стороны идеального геодезического четырехугольника.

которую нужно прибавить к средней длине стороны, полученной по (7), благодаря наличию в сети диагоналей составит

$$\delta a=\frac{\Sigma a_i+\Sigma d_i}{n_a+n_d}-\frac{\Sigma a_i}{n_a}=\frac{\Sigma d_i n_a-\Sigma a_i n_d}{n_a(n_a+n_d)}, \tag{10}$$

или проще, после выражения через известные величины

$$\delta a=\frac{\Sigma d_i}{n_a+n_d}-\frac{a_{ср}n_d}{n_a+n_d}=\frac{\Sigma d_i-a_{ср}n_d}{n_a+n_d}. \tag{11}$$

Можно вместо (11) получить приближенную формулу, если вынести в числителе и знаменателе первой дроби (10) первые члены за скобки и применить разложение в ряд биному Ньютона. Тогда имеем

$$\delta a\cong\frac{\Sigma d_i-a_{ср}n_d}{n_a}. \tag{11a}$$

Проверим (11) на геодезическом четырехугольнике (см. рис. 2). По (11)

$$\delta a=\frac{1,73a-a}{6}=0,12a\,(!). \tag{12}$$

Для квадрата с диагоналями соответственно получим

$$\delta a=\frac{(1,41-1,08)a}{6}=0,055a\ (\text{должно быть } 0,055a), \tag{13}$$

Формулы (7) и (11) выведены нами для самого благоприятного случая, т. е. для идеальной сети с углами в треугольниках по 60°.

Поскольку идеальные сети отличаются от реальных, уточним коэффициенты формул (7) и (11), определив их для некоторых характерных случаев, а затем осредним.

1. Сеть из квадратов (углы в треугольниках 45, 90 и 45°). Для связи с рассмотренным выше случаем и во избежание растяжения треугольников потребуем, чтобы средняя длина стороны треугольника в сети была такой же, как и в идеальной сети, т. е. равна a. Значит, стороны каждого треугольника должны удовлетворять условию

$$x + x + x\sqrt{2} = 3a. \tag{14}$$

Отсюда $x = 0{,}879a$, площадь треугольника

$$S_{\triangle} = 0{,}5 \cdot 0{,}879^2 a^2 = 0{,}386a^2. \tag{15}$$

Площадь зоны влияния

$$S_{\square} = 2S_{\triangle} = 0{,}773a^2. \tag{16}$$

Следовательно,

$$a_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\Sigma S}{0{,}773\,(n_{\text{вн}} + 0{,}5\,n_{\text{бк}} + 0{,}25\,n_{\text{уг}})}}, \tag{7а}$$

причем $1 : 0{,}773 = 1{,}138$, а отношение наибольшей стороны к наименьшей 1,41.

2. Сеть из треугольников с углами 30, 90 и 60°. Очевидно, это самый неблагоприятный случай, так как углы меньше 30°, как правило, не допускаются. В этом случае

$$x + x + x\sqrt{3} = 3a. \tag{17}$$

Отсюда $x = 0{,}634a$, площадь треугольника

$$S_{\triangle} = 0{,}5 \cdot 634^2 a^2 = 0{,}348a^2, \tag{18}$$

а площадь зоны влияния

$$S_{\square} = 2S_{\triangle} = 0{,}696a^2 \tag{19}$$

Следовательно,

$$a_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\Sigma S}{0{,}696\,(n_{\text{вн}} + 0{,}5\,n_{\text{бк}} + 0{,}25\,n_{\text{уг}})}}, \tag{7б}$$

причем $1 : \sqrt{0{,}696} = 1{,}199$, а отношение сторон 2,0.

Взяв для сети произвольной формы среднее из трех полученных коэффициентов $1/3 \cdot (1{,}075 + 1{,}138 + 1{,}199) = 1{,}14$, получим среднюю длину стороны с ошибкой не более 5%, что в сети II класса не превысит 1 км и достаточно для практики. То же относится и к (11). Если такая точность недостаточна, то можно выбирать коэффициент в зависимости от формы сети из трех.

Проверка формул для реальных сетей. Проверка полученных формул была выполнена на двух сетях триангуляции II класса, чертежи которых были построены на миллиметровой бумаге в масштабе 1 : 100 000. Стороны сетей были измерены линейкой с точностью 0,2 мм (0,02 км), а площади измерены дважды полярным планиметром.

Сеть № 1 (рис. 3, табл. 1). Число пунктов $n_р=24$, $n_{вн}=10$, $n_{уг}=4$. Колебания длин сторон от 6,30 до 9,0 км, т. е. сеть близка к идеальной. Сеть простая, диагоналей нет. Число сторон $n_a=55$. Площадь сети 832,5 км. Средняя длина стороны 7,78 км.

Получим среднюю длину стороны по (7):

$$a_{ср} = 1{,}075\sqrt{\frac{832{,}5}{(10+5+1)}} = 7{,}75 \text{ км},$$

т. е. расхождение с точным значением, полученным по чертежу, меньше 0,5%.

Таблица 1. **Стороны сети № 1**

№ стор.	Длина стор.	№ стор.	Длина стор.	№ стор.	Длина стор.	№ стор.	Длина стор.	№ стор.	Длина стор.
1	8,00	12	7,70	23	8,00	34	7,05	45	8,45
2	6,85	13	6,80	24	8,30	35	7,25	46	7,40
3	7,60	14	8,85	25	7,55	36	8,15	47	8,10
4	7,45	15	8,20	26	7,55	37	7,10	48	8,80
5	9,00	16	7,75	27	7,99	38	7,20	49	7,00
6	8,60	17	6,85	28	9,00	39	7,80	50	6,80
7	8,05	18	8,50	29	7,45	40	6,90	51	6,30
8	7,65	19	7,25	30	7,73	41	6,90	52	8,35
9	8,05	20	7,80	31	7,00	42	7,85	53	7,75
10	8,00	21	7,85	32	7,62	43	7,35	54	8,05
11	8,25	22	7,50	33	7,55	44	7,40	55	7,80
Σ	87,50	Σ	87,05	Σ Σa	85,74 427,74	Σ	80,95	Σ $a_{ср}$	86,50 7,78

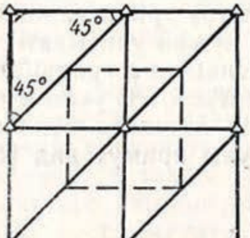

Рис. 3. Сеть № 1.

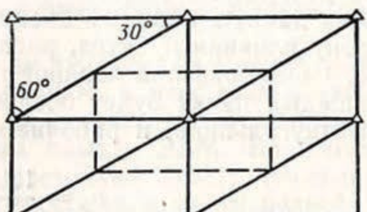

Рис. 4. Сеть № 2.

Сеть № 2 (рис. 4, табл. 2). Число пунктов $n_р=28$, $n_{вн}=13$, $n_{бк}=11$, $n_{уг}=4$. Колебания длин сторон от 6,7 до 15,2 км. Сеть сложная, число диагоналей 2. Число сторон $n_a=68$. Площадь сети 1415 км. Средняя длина стороны по чертежу 9,29 км, с учетом диагоналей — 9,39 км.

По (7) для сети без диагоналей получаем

$$a_{ср} = \frac{1415}{13+5{,}5+1} = 9{,}69 \text{ км с ошибкой } +0{,}4 \text{ км } (4{,}3\%).$$

По (11) вычисляем поправку

$$\delta a = \frac{25{,}4 - 9{,}69\cdot 2}{66+2} = \frac{6{,}02}{68} = 0{,}088 \text{ км}$$

и $a'_{ср} = 9{,}69+0{,}09 = 9{,}7$ км с ошибкой $+0{,}39$ км (4,2%).

Таблица 2. **Стороны сети № *2***

№ стор.	Длина стор.	№ стор.	Длина стор.	№ стор.	Длина стор.	№ стор.	Длина стор.
1	9,00	18	8,50	35	7,80	52	10,50
2	9,51	19	7,60	36	9,40	53	9,10
3	8,12	20	8,10	37	11,90	54	10,15
4	8,14	21	7,80	38	7,70	55	9,80
5	9,28	22	7,98	39	9,58	56	11,00
6	8,20	23	7,55	40	9,70	57	11,70
7	8,07	24	7,55	41	10,90	58	10,22
8	10,18	25	7,15	42	7,80	59	8,18
9	9,81	26	10,35	43	9,08	60	9,12
10	12,20	27	9,95	44	8,90	61	9,70
11	8,84	28	9,38	45	12,00	62	15,20
12	9,50	29	9,48	46	12,80	63	10,60
13	6,70	30	7,63	47	7,32	64	7,00
14	8,80	31	10,60	48	11,88	65	11,00
15	12,00	32	11,26	49	8,80	66	7,90
16	7,90	33	9,40	50	7,65	67	13,30
17	7,70	34	7,20	51	9,08	68	12,10
Σ	153,95	Σ	147,47	Σ	160,99	Σ	176,57
				Σa	613,58	$\Sigma a+\Sigma d$	638,98
				$a_{ср}$	9,29	$a_{ср}$	9,39

Можно полагать, что для сети произвольной формы и для разноклассной сети даже в худшем случае погрешности формул (7), (7а), (7б) и (11) не превзойдут 4—5%, что вполне допустимо, а эффект от их применения довольно большой.

Если речь идет о расчете числа пунктов триангуляции, обеспечивающих данную площадь съемки, то нужно учитывать и «внешнюю» зону влияния пунктов, расположенных на границах участка (на рис. 1 она показана двойной штриховкой). С учетом этой площади каждый пункт будет обеспечивать площадь полного основного шестиугольника, и рабочие формулы примут вид [3]:

$$n_р = \frac{1{,}155\, \Sigma S}{a_{ср}^2}, \qquad (20)$$

$$a_{ср} = \sqrt{\frac{1{,}155\, \Sigma S}{n_р}} = 1{,}075 \sqrt{\frac{\Sigma S}{n_р}}, \qquad (21)$$

или

$$1{,}137 \sqrt{\frac{\Sigma S}{n_р}}. \qquad (21а)$$

Для случая разноклассной сети (например, II и III классов) можно использовать те же формулы, рассматривая в случае необходимости стороны сети высшего класса как диагонали.

Данную задачу определения средней длины стороны и числа пунктов можно решать с помощью ЭВМ, вводя в качестве исходной информации либо приближенные координаты пунктов и указания о связях между ними, либо длину исходной стороны и углы треугольников.

Список литературы: 1. Инструкция по построению государственной геодезической сети СССР. — М. : Недра, 1966. 2. Справочник маркшейдера. — М. : Металлургиздат, 1953, т. 1. 3. Темник для изобретателей и рационализаторов. — М. : Недра, 1966.

Статья поступила в редколлегию 06. 09. 82