

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ РЕЛЬЕФА С РЕГУЛЯРНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ТОЧЕК

Цифровые модели рельефа (ЦМР) с регулярным расположением точек обладают рядом достоинств [2], а именно: 1) пространственное положение любой точки описывается только одним числом — отметкой данной точки; 2) отпадает необходимость записывать в память ЭВМ информацию о логических связях между точками модели; 3) упрощаются алгоритмы интерполяции высот [4] и нахождения точек горизонталей. Однако несовершенством данной ЦМР является недостаточная адекватность модели рельефу местности, так как регулярная сетка точек не согласуется со структурой рельефа, и определенная субъективность при выборе шага сетки.

В самом деле, с увеличением расстояния между узлами сетки будут возрастать погрешности ЦМР, и наоборот, с уменьшением шага сетки увеличатся затраты времени на подготовку исходной информации, а также загрузка памяти ЭВМ. Вот почему поиск оптимального параметра — расстояния между точками регулярной ЦМР — применительно к различным типам рельефа является актуальной задачей.

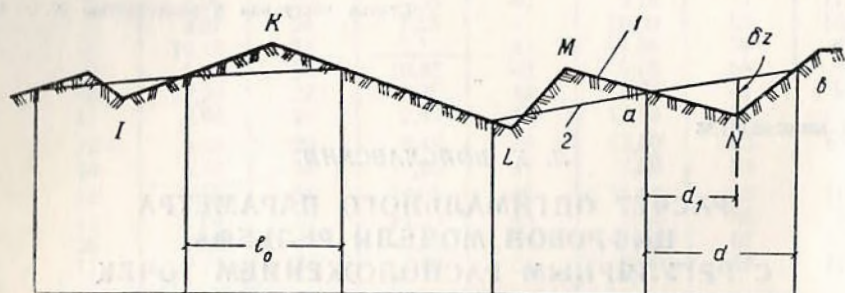
Прежде чем перейти к существу вопроса, сформулируем некоторые исходные положения:

1. Для ограниченного участка местности рельеф стохастически изотропен, т. е. статистические свойства рельефа по любым возможным направлениям примерно одинаковы. Это предположение базируется на исследованиях В. Ф. Носкова [6], где отмечено, что рельеф равнинной и холмистой местностей площадью до 5—6 км² можно представить как реализацию однородного изотропного случайного поля.

2. Любое использование ЦМР предполагает выделение некоторого достаточно малого интервала квантования Δz , в границах которого высоты точек практически неразличимы. Следовательно,

при заданном Δz естественный профиль местности в каком угодно направлении может быть представлен ломаной линией, вершины которой — характерные точки. Принципы отбора характерных точек обоснованы в [3].

Рассмотрим профиль местности, аппроксимированный ломаной линией (см. рисунок). Расстояния между ее вершинами — случайные величины, имеющие гамма-распределение [3]. Если за единицу длины l принять среднее расстояние между характерными



Взаимное расположение естественной поверхности земли и поверхности ЦМР с регулярным расположением точек:

1 — поверхность земли, аппроксимированная ломаной линией; 2 — сглаженная поверхность ЦМР.

ми точками l , плотность вероятности этих величин выразим функцией с одним параметром

$$f(l) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} l^{\alpha-1} \exp(-\alpha l), \quad (1)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Пусть интересующий нас профиль разделен на равные ячейки. Нормированную длину ячейки, выраженную в долях среднего расстояния между характерными точками \bar{l} , обозначим l_0 . На основе распределения (1) можно установить вероятности следующих событий:

$P_0(l_0)$ — в данной ячейке нет ни одной характерной точки;

$P_1(l_0)$ — в данной ячейке только одна характерная точка;

$P_2(l_0)$ — в данной ячейке две характерные точки и т. д. Для этой цели нами получена рекуррентная формула

$$P_m(l_0) = \int_0^{l_0} P_{m-1}(x) P_0(l_0 - x) dx \quad (m \geq 1) \quad (2)$$

при начальных условиях

$$P_0(x) = \int_x^\infty f(l) dl, \quad P_0(l_0 - x) = \int_{l_0-x}^\infty f(l) dl.$$

Поскольку с возрастанием m значения $P_m(l_0)$ очень быстро убывают, $P_0(l_0)$ определим как вероятность противоположного события

$$P_0(l_0) = 1 - [P_1(l_0) + P_2(l_0) + \dots + P_m(l_0)]. \quad (3)$$

Вероятности, вычисленные по (1) и (3), приведены в табл. 1.

Таблица 1. Распределение вероятностей количества характерных точек рельефа в зависимости от нормированной длины ячейки

l_0	$P_0(l_0)$	$P_1(l_0)$	$P_2(l_0)$	$P_3(l_0)$	$P_0(l_0)$	$P_1(l_0)$	$P_2(l_0)$	$P_3(l_0)$	l_0
$\alpha=1$					$\alpha=2$				
0,10	0,90	0,09	0	0	0,91	0,09	0	0	0,10
0,15	0,86	0,13	0,01	0	0,86	0,13	0,01	0	0,15
0,20	0,82	0,16	0,02	0	0,81	0,18	0,01	0	0,20
0,25	0,78	0,19	0,02	0	0,75	0,22	0,02	0	0,25
0,30	0,74	0,22	0,03	0	0,70	0,26	0,03	0	0,30
0,35	0,70	0,25	0,04	0,01	0,65	0,30	0,04	0,01	0,35
0,40	0,67	0,27	0,05	0,01	0,60	0,33	0,06	0,01	0,40
0,45	0,64	0,29	0,06	0,01	0,55	0,36	0,08	0,01	0,45
0,50	0,61	0,30	0,08	0,01	0,50	0,39	0,09	0,01	0,50
0,55	0,58	0,32	0,09	0,01	0,45	0,41	0,11	0,02	0,55
0,60	0,55	0,33	0,10	0,02	0,41	0,43	0,13	0,02	0,60
0,65	0,52	0,34	0,11	0,02	0,37	0,45	0,15	0,03	0,65
0,70	0,50	0,35	0,12	0,03	0,33	0,46	0,17	0,04	0,70
0,75	0,47	0,35	0,13	0,03	0,29	0,47	0,18	0,05	0,75
0,80	0,45	0,36	0,14	0,04	0,26	0,48	0,20	0,05	0,80
$\alpha=3$					$\alpha=4$				
0,10	0,91	0,09	0	0	0,91	0,09	0	0	0,10
0,15	0,86	0,13	0,01	0	0,85	0,14	0,01	0	0,15
0,20	0,80	0,18	0,01	0	0,80	0,18	0,01	0	0,20
0,25	0,74	0,23	0,02	0	0,74	0,23	0,03	0	0,25
0,30	0,68	0,27	0,04	0	0,68	0,28	0,04	0	0,30
0,35	0,62	0,32	0,05	0	0,62	0,33	0,05	0	0,35
0,40	0,56	0,36	0,07	0,01	0,56	0,37	0,06	0,01	0,40
0,45	0,50	0,40	0,09	0,01	0,49	0,41	0,09	0,01	0,45
0,50	0,45	0,43	0,10	0,02	0,43	0,44	0,11	0,02	0,50
0,55	0,39	0,46	0,12	0,02	0,36	0,49	0,13	0,02	0,55
0,60	0,34	0,48	0,14	0,03	0,30	0,51	0,15	0,03	0,60
0,65	0,28	0,51	0,17	0,03	0,24	0,54	0,18	0,04	0,65
0,70	0,23	0,52	0,19	0,04	0,18	0,56	0,20	0,05	0,70
0,75	0,18	0,54	0,21	0,05	0,12	0,58	0,23	0,06	0,75
0,80	0,14	0,55	0,23	0,06	0,07	0,59	0,25	0,07	0,80

Анализируя представленные данные, видим, что если шаг сетки регулярной ЦМР принять в границах от 0,20 до 0,35, будем иметь 60—80% «пустых» ячеек, где нет ни одной характерной точки и ЦМР адекватна рельефу. Еще от 16 до 35% ячеек содержат не более одной точки. Количество ячеек с двумя и более характерными точками не превышает 5% их общего числа.

При наличии в ячейке только одной характерной точки ЦМР существенно не совпадает с рельефом местности лишь тогда, когда вертикальное расстояние от точки N (см. рисунок) до сглаживающей прямой ab больше половины интервала Δz , т. е.

$$|\delta z| > \frac{\Delta z}{2}. \quad (4)$$

Попытаемся определить вероятность $P \left(|\delta z| > \frac{\Delta z}{2} \right)$. Из рисунка следует, что

$$\delta z = d_1 \left[i_1 - \frac{d_1(i_1 - i_2) + di_2}{d} \right],$$

где d, d_1 — длина ячейки и расстояние aN , выраженные в метрах; i_1, i_2 — уклоны линий aN и Nb соответственно. Обозначив

$$\frac{d_1}{d} = t, \quad |i_1 - i_2| = T$$

и переходя от δz к ее абсолютному значению, получаем

$$|\delta z| = d(t - t^2)T. \quad (5)$$

Таким образом, $|\delta z|$ представляет собой функцию трех аргументов — длины ячейки d , случайных величин (СВ) t и T .

Внутри ab любые положения точки N одинаково возможны. Поэтому в первом приближении можно принять, что СВ t распределена равномерно в интервале от 0 до 1.

Распределение СВ T найдено опытным путем по материалам полевых изысканий десяти трасс линейных сооружений. В результате проведенного эксперимента установлено: T имеет логнормальное распределение. Это значит, что СВ $u = \lg T$ распределена

Таблица 2. Распределение

T_{\min}	$\lg T_{\min}$	Количество случайных величин T , попадающих в равные по логарифмическим интервалам. Длина интервала выражена в долях $R = \lg T_{\max} - \lg T_{\min}$															
		0-0,05	0,05-0,1	0,1-0,15	0,15-0,2	0,2-0,25	0,25-0,3	0,3-0,35	0,35-0,4	0,4-0,45	0,45-0,5	0,5-0,55	0,55-0,6	0,6-0,65	0,65-0,7	0,7-0,75	0,75-0,8
0,0020	-2,70	6	10	20	9	21	20	24	22	13	11	8	8	4	4	4	3
0,0005	-3,26	1	1	1	1	4	10	15	12	14	15	20	31	20	15	15	18
0,0010	-3,00	1	1	1	1	0	0	20	20	21	15	18	17	26	22	11	5
0,0007	-3,15	1	1	1	1	0	0	10	14	13	22	27	24	28	16	17	8
0,0008	-3,11	1	1	15	25	34	26	36	33	13	5	0	4	4	1	1	1
0,0011	-2,97	4	4	4	0	13	15	16	16	20	22	21	25	11	6	3	3
0,0006	-3,24	4	4	8	8	8	12	15	10	20	21	15	24	19	23	11	5
0,0013	-2,89	4	4	10	12	13	11	17	16	21	24	13	12	12	9	4	7
0,0010	-3,00	0	0	12	16	18	17	18	11	13	21	18	13	9	7	4	4
0,0010	-3,00	2	2	2	11	15	19	31	30	18	26	18	11	6	14	6	2

Примечание: При вычислении критерия χ^2 крайние интервалы группирования объединены.

по нормальному закону с параметрами $\lg T_0$ и σ , где $\lg T_0$ представляет собой математическое ожидание СВ u , а σ — ее среднее квадратическое отклонение [1]. Согласие опытного распределения T с теоретическим, проверенное при помощи критерия χ^2 , как это видно из табл. 2, можно считать удовлетворительным. Экспериментальным путем установлена также тесная связь $\lg T_0$ и $\lg \bar{l}$, которую можно выразить эмпирической формулой

$$\lg T_0 = 0,79 - 1,5 \lg \bar{l}. \quad (6)$$

Кроме того, из табл. 2 следует, что для равнинной, а также холмистой местностей параметр σ устойчив и изменяется в довольно узких пределах — от 0,45 до 0,55.

Подставляя $|\delta z|$ из (5) в (4), имеем

$$T > \frac{\Delta z}{2d(t - t^2)}. \quad (7)$$

Введем обозначение

$$T_q = \frac{\Delta z}{2d(t - t^2)}. \quad (8)$$

Величина T почти всегда, а T_q всегда меньше единицы.

Вероятность $P\left(|\delta z| > \frac{\Delta z}{2}\right)$, принимая во внимание (7) и (8),

можно найти из выражения

$$P\left(|\delta z| > \frac{\Delta z}{2}\right) = P(T > T_q) = \int_0^1 F(T_q) dt, \quad (9)$$

случайной величины I

кой шкале)				T_{\max}	$\lg T_{\max}$	R	Параметры			Критерии согласия	
$0,8-0,85$	$0,85-0,9$	$0,9-0,95$	$0,95-1$				$\lg T_0$	\bar{l}	σ	χ^2	$K-N-1$
3	2	1	4	0,661	-0,18	2,52	-1,82	63,1	0,52	19,5	10
5	5	4	3	0,724	-0,14	3,12	-1,51	38,6	0,56	8,9	11
3	5	1	1	0,933	-0,03	2,97	-1,43	28,9	0,50	26,1	10
7	8	1	2	0,912	-0,04	3,11	-1,39	27,7	0,50	4,8	10
—	—	2	2	0,661	-0,18	2,93	-2,15	79,6	0,51	31,0	10
3	1	3	3	0,661	-0,18	2,79	-1,63	50,7	0,54	8,4	11
6	3	1	1	0,257	-0,59	2,65	-1,88	63,3	0,48	11,1	11
6	7	3	2	0,302	-0,52	2,37	-1,85	50,6	0,55	10,0	13
6	3	1	2	0,214	-0,67	2,33	-1,88	51,0	0,45	13,3	13
3	3	1	4	0,339	-0,47	2,53	-1,88	56,5	0,49	17,5	10

нены так, чтобы в каждом из них теоретически ожидаемое число СВ было не менее 10.

где

$$F(T_q) = \begin{cases} 0,5 + \Phi_0\left(\frac{\lg T_0 - \lg T_q}{\sigma}\right), & \text{если } T_q < T_0; \\ 0,5 & \text{если } T_q = T_0; \\ 0,5 - \Phi_0\left(\frac{\lg T_0 - \lg T_q}{\sigma}\right), & \text{если } T_q > T_0; \end{cases}$$

$\Phi_0(x)$ — нормированная функция Лапласа.

В табл. 3 представлены вероятности $P\left(|\delta z| > \frac{\Delta z}{2}\right)$, вычисленные по аргументам $\frac{\Delta z}{2d}$ и \bar{l} (см. выражение (6)).

На основании данных табл. 3 можно сделать вывод, что наряду с «пустыми» ячейками мы всегда будем иметь еще некоторое число ячеек, где даже при наличии одной характерной точки ЦМР практически совпадает с рельефом местности. Вероятность такого рода события определяется равенством

$$\tilde{P}_1(l_0) = P_1(l_0) \left[1 - P\left(|\delta z| > \frac{\Delta z}{2}\right) \right]. \quad (10)$$

Переходим к анализу погрешностей, возникающих вследствие сглаживания рельефа в ЦМР с регулярным расположением точек. Несомненно, погрешности сглаживания будут зависеть как от плотности точек, так и от структуры рельефа [5, 7]. Характер этой зависимости исследован экспериментальным путем.

На десяти участках с различным строением рельефа отметки точек регулярной ЦМР определены линейной интерполяцией между характерными точками профиля (линии сетки), аппроксимированного ломаной линией $\Delta z = 0,1$ м. По линиям сетки намечены контрольные точки. Эти точки равномерно распределяются по длине так, чтобы ни одна из них не совпадала с узлом сетки ЦМР и чтобы всякий раз они располагались в разных местах ячейки. Количество контрольных точек n на отдельных участках колеблется от 250 до 700. Погрешности сглаживания рельефа определены как разности

$$\Delta_c = z_{\text{ЦМР}} - z_{\text{ПР}},$$

где $z_{\text{ПР}}$ — отметка контрольной точки, полученная линейной интерполяцией между характерными точками профиля; $z_{\text{ЦМР}}$ — отметка контрольной точки, найденная линейной интерполяцией между ближайшими точками ЦМР.

В результате для каждого участка получено по девять выборок объема n , соответствующим длине шага сетки 7...63 м. По всем выборкам вычислены средние квадратические погрешности сглаживания рельефа

$$m_c = \sqrt{\frac{[\Delta_c^2]}{n}}.$$

На основе анализа экспериментальных данных установлено, что между m_c и нормированной длиной ячейки l_0 существует тесная зависимость, выражаемая эмпирической формулой

$$m_c = 0,25 l_0^{1,2}. \quad (11)$$

Коэффициент корреляции величин $\ln m_c$ и $\ln l_0$ равен 0,93 при объеме выборки $N=90$.

Установлено также, что погрешности Δ_c обладают свойствами ограниченности, компенсации, равновероятности и унимодальности, т. е. являются типичными случайными погрешностями. Вместе с тем распределение этих погрешностей в значительной мере отличается от нормального. Более того, сам характер распределения существенно зависит от длины l_0 . Это распределение частично можно описать следующими эмпирическими формулами, полученными по экспериментальным данным:

$$\begin{aligned} P(|\Delta_c| > m_c) &= 0,1 l_0^{0,6}; \\ P(|\Delta_c| > 2m_c) &= 0,05 l_0^{0,5}; \\ P(|\Delta_c| > 3m_c) &= 0,02 l_0^{0,3}; \\ P(|\Delta_c| > 5m_c) &= 0,008 \pm 0,003, \end{aligned} \quad (12)$$

где P — вероятность того, что абсолютная величина погрешности окажется больше некоторого фиксированного предела.

Проведенные исследования позволяют определить два направления оптимизации шага сетки для ЦМР с регулярным расположением исходных точек.

Вероятностное. Используя табл. 1, 3 и формулу (10), всегда можно подобрать такой шаг сетки, для которого

$$P_0(l_0) + \tilde{P}_1(l_0) > Q,$$

где Q — наперед заданная, достаточно большая вероятность согласованности ЦМР с рельефом местности, например 0,90; 0,95 и т. д.

По средней квадратической и предельной погрешности. Принимая на основе нормативных документов или каких-либо других соображений определенные значения m_c или $|\Delta_c|$ и зная среднее расстояние между характерными точками l , при помощи (11) и (12) можно рассчитать наиболее приемлемую для данных условий длину ячейки.

Список литературы: 1. *Абезгауз Г. Г., Тронь А. П., Копенкин Ю. Н., Коровина И. А.* Справочник по вероятностным расчетам. — М.: Воениздат, 1970. 2. *Бойко А. В.* Методы и средства автоматизации топографических съемок. — М.: Недра, 1980. 3. *Войславский Л. К.* Информационная модель профиля местности. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 35. 4. *Гармиз И. В.* Метод оценки точности интерполяции по регулярной сетке высот при проектировании земляных работ в строительстве на ЭВМ. — Л.: Стройиздат, 1973. 5. *Каморный В. М.* Использование графопостроителя при составлении карт шельфа. — Геодезия и картография, 1981, № 12. 6. *Носков В. Ф.* Математическая модель рельефа и связь ее параметров с геоморфологическими характе-

ристиками. — Вестн. МГУ. Сер. география, 1969, № 1. 7. *Петракова В. И., Тимусов Г. Н.* Опыт рисовки горизонталей на фотоплане по точкам цифровой модели рельефа для проектирования мелиоративных систем. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 35.

Статья поступила в редколлегию 27. 11. 82