УДК 625.113:528.5

А. В. ГОЖИЙ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ДЕТАЛЬНОЙ РАЗБИВКИ КРУГОВОЙ КРИВОЙ СПОСОБОМ ПРОДОЛЖЕННЫХ ХОРД

Как мы уже отмечали [2, 3], точность детального построения круговой кривой тем или иным способом надежнее всего можно оценить по значению погрешности δR (или соответствующей средней квадратической погрешности m_R) построения радиуса R кривой в отдельных ее точках и погрешности δk (или m_k), характеризующей степень нарушения равенства интервалов детальной разбивки. В общем случае погрешности δR и δk можно определить через погрешности δx и δy прямоугольных координат (x и y) точек по таким формулам:

$$\delta R = \frac{x}{R}\delta x - \frac{(R-y)}{R}\delta y, \tag{1}$$

$$\delta k = \frac{(R-y)}{R}\delta x + \frac{x}{R}\delta y. \tag{2}$$

Здесь координаты x и y заданы в системе прямоугольных координат, в которой ось X совпадает с направлением тангенса кривой, ось Y направлена с начала или с конца кривой к ее центру, а начало системы совмещено с началом или с концом кривой.

Чтобы выразить погрешности δR и δk через погрешности разбивочных элементов конкретного способа детальной разбивки кривой, необходимо руководствоваться следующими правилами [4].

1. На основе рабочих формул способа установить функциональную зависимость между его разбивочными элементами и прямоугольными координатами x и y точек кривой.
2. Выразить погрешности δx и δy прямоугольных координат точек кривой через погрешности разбивочных элементов способа.
3. Преобразовать (1) и (2) с учетом полученных при реализации п. 2 выражений для δx и δy.

В дальнейшем преобразованные (1) и (2) служат для определения вида зависимости между средними квадратическими погрешностями построения радиуса (m_R) кривой и равенства интервалов разбивки (m_k) и средними квадратическими погрешностями разбивочных элементов способа.

Применим указанные правила для оценки точности детальной разбивки круговой кривой способом продолженных хорд.

Обычно в названном способе разбивки первую точку кривой выносят в натуру по ее прямоугольным координатам x_1 и y_1, а последующие точки — путем линейной засечки их хордой a из предыдущей точки кривой и промежуточным перемещением b из конца продолженной в предыдущей точке кривой хорды [1] (см. рисунок). Прямоугольные координаты x и y точек кривой находим из следующей зависимости с интервалом детальной разбивки — хордой a, радиусом кривой R и центральным углом 2β, стягиваемым хордой a:

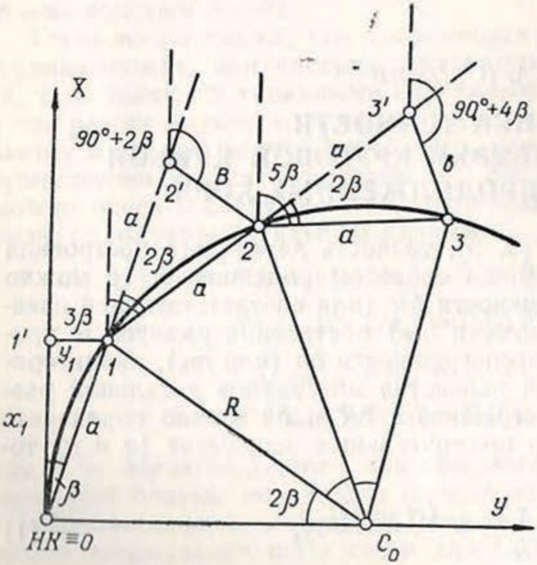

Схема выноса в натуру точек кривой способом продолженных хорд.

$$x_1 = a\cos\beta = a\left(1 - \frac{a^2}{8R^2}\right), \tag{3}$$

$$y_1 = a\sin\beta = \frac{a^2}{2R}, \tag{4}$$

$$x_2 = a\,(\cos\beta + \cos 3\beta), \tag{5}$$

$$y_2 = a\,(\sin\beta + \sin 3\beta), \tag{6}$$

. . . .

$$x_n = a\sum_{k-1}^{n}\cos(2k-1)\,\beta, \tag{7}$$

$$y_n = a\sum_{k-1}^{n}\sin(2k-1)\,\beta. \tag{8}$$

Промежуточное перемещение b можно определить как

$$b = a^2/R. \tag{9}$$

Получим теперь формулы для определения погрешностей δx_1, δy_1, δx_2, $\delta y_2, \ldots, \delta x_n$, δy_n точек $1, 2, \ldots, n$ кривой.

Если при разбивке кривой хорду a откладывать с погрешностью δa, то на основе (3) и (4) для точки *1* кривой можно записать, что

$$\delta x_1 = \delta a\left(1 - \frac{a}{4R^2}\right) \approx \delta a, \quad (10) \qquad \delta y_1 = \frac{a}{R}\,\delta a. \quad (11)$$

Чтобы получить формулы для определения погрешностей δx_2 и δy_2, необходимо принять во внимание следующие факты.

1. Поскольку точку *2* кривой выносят в натуру путем линейной засечки ее хордой a из точки *1* и промежуточным перемещением b из точки *2'*, то погрешности δx_2 и δy_2 должны зависеть не только от погрешностей отложения хорды a в точке *1* (δx_{1a}, δy_{1a}) и перемещения b в точке *2'* ($\delta x_{2'b}$, $\delta y_{2'b}$) в системе прямоугольных координат, но и от соответствующих погрешностей точек 1 (δx_1, δy_1) и *2'* ($\delta x_{2'}$; $\delta y_{2'}$), т. е.

$$\delta x_2 = \delta x_1 + \delta x_{2'} + \delta x_{1a} + \delta x_{2'b}, \quad (12)$$

$$\delta y_2 = \delta y_1 + \delta y_{2'} + \delta y_{1a} + \delta y_{2'b}. \quad (13)$$

2. При выносе точки *2* в натуру хорда a и перемещение b составляют с положительным направлением оси X углы, равные 3β и $(90° + 2\beta)$ соответственно. Поэтому можно записать, что

$$\delta x_{1a} = \delta a \cos 3\beta, \quad (14) \qquad \delta y_{1a} = \delta a \sin 3\beta, \quad (15)$$

$$\delta x_{2'b} = -\delta b \sin 2\beta, \quad (16) \qquad \delta y_{2'b} = \delta b \cos 2\beta. \quad (17)$$

3. В погрешности $\delta x_2'$ и $\delta y_2'$ (точки *2'*, которую строят путем отложения расстояния a от точки *1* вдоль продолжения хорды *0—1*, должны входить удвоенные по значению погрешности построения точки *1*, через которую продолжают хорду *0—1*, а также угловая погрешность $\delta\alpha$ построения створа хорды *0—1* и погрешность δa отложения хорды a вдоль этого створа *. Чтобы представить влияние погрешностей $\delta\alpha$ и δa в системе прямоугольных координат, необходимо учесть, что хорда *0—1* расположена под углом β по отношению к положительному направлению оси X. Из сказанного следует, что

$$\delta x_{2'} = 2\delta x_1 - 2a\,\frac{\delta\alpha}{\rho}\sin\beta + \delta a\cos\beta, \quad (18)$$

$$\delta y_{2'} = 2\delta y_1 + 2a\,\frac{\delta\alpha}{\rho}\cos\beta + \delta a\sin\beta. \quad (19)$$

Подстановка (10), (11), (14)—(19) в (12) и (13) и простые преобразования последних приводят к таким формулам для определения δx_2 и δy_2:

$$\delta x_2 = 3\delta a + \delta a(\cos\beta + \cos 3\beta) - 2a\,\frac{\delta\alpha}{\rho}\sin\beta - \delta b\sin 2\beta, \quad (20)$$

$$\delta y_2 = 3\,\frac{a}{R}\,\delta a + \delta a(\sin\beta + \sin 3\beta) + 2a\,\frac{\delta\alpha}{\rho}\cos\beta + \delta b\cos 2\beta. \quad (21)$$

---

* Погрешности фиксации основных и промежуточных точек условимся учитывать при установлении значения погрешностей δa и $\delta\alpha$.

Аналогичным путем можно получить

$$\delta x_3 = 9\delta a + 3\delta a(\cos\beta + \cos 3\beta) + \delta a(\cos 3\beta + \cos 5\beta) -$$

$$- \delta b(3\sin 2\beta + \sin 4\beta) - 2a\frac{\delta\alpha}{\rho}(3\sin\beta + \sin 3\beta), \qquad (22)$$

$$\delta y_3 = 9\frac{a}{R}\delta a + 3\delta a(\sin\beta + \sin 3\beta) + \delta a(\sin 3\beta + \sin 5\beta) +$$

$$+ \delta b(3\cos 2\beta + \cos 4\beta) + 2a\frac{\delta\alpha}{\rho}(3\cos\beta + \cos 3\beta), \qquad (23)$$

. . . .

$$\delta x_n = 3^{n-1}\delta a + \delta a\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}[\cos(2k-3)\beta + \cos(2k-1)\beta] -$$

$$- \delta b\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\sin 2(k-1)\beta - 2a\frac{\delta\alpha}{\rho}\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\sin(2k-3)\beta, \qquad (24)$$

$$\delta y_n = 3^{n-1}\frac{a}{R}\delta a + \delta a\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}[\sin(2k-3)\beta + \sin(2k-1)\beta] +$$

$$+ \delta b\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\cos 2(k-1)\beta + 2a\frac{\delta\alpha}{\rho}\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\cos(2k-3)\beta. \qquad (25)$$

Если ввести обозначения

$$\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\sin(2k-1)\beta = C'_n; \quad \sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\cos(2k-1)\beta = D'_n;$$

$$\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\sin 2(k-1)\beta = E'_n; \quad \sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\cos 2(k-1)\beta = F'_n;$$

$$\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\sin(2k-3)\beta = G_n; \quad \sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}\cos(2k-3)\beta = H_n;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\beta = C_n; \quad \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\beta = D_n; \qquad (26)$$

$$G_n + C'_n = P_n; \quad H_n + D'_n = Q_n, \qquad (27)$$

то (7), (8), (24) и (25) можно представить в более компактном виде:

$$x_n = aD_n; \quad (28) \qquad y_n = aC_n, \qquad (29)$$

$$\delta x_n = 3^{n-1}\delta a + Q_n\delta a - E'_n\delta b - 2a\frac{\delta\alpha}{\rho}G_n, \qquad (30)$$

$$\delta y_n = 3^{n-1}\frac{a}{R}\delta a + P_n\delta a + F'_n\delta b + 2a\,H_n\frac{\delta\alpha}{\rho}. \qquad (31)$$

После подстановки последних выражений для x_n, y_n, δx_n и δy_n в исходные соотношения (1) и (2) мы получим такие формулы для определения погрешностей δR и δk:

$$\delta R = \frac{a}{R} D_n \left[3^{n-1} \delta a + Q_n \delta a - E'_n \delta b - 2a\, G_n \frac{\delta \alpha}{\rho} \right] - \frac{R - aC_n}{R} \left[3^{n-1} \frac{a}{R} \delta a + P_n \delta a + F'_n \delta b + 2a\, H_n \frac{\delta \alpha}{\rho} \right], \quad (32)$$

$$\delta k = \frac{R - aC_n}{R} \left[3^{n-1} \delta a + Q_n \delta a - E'_n \delta b - 2a\, G_n \frac{\delta \alpha}{\rho} \right] + \frac{a}{R} D_n \left[3^{n-1} \frac{a}{R} \delta a + P_n \delta a + F'_n \delta b + 2a\, H_n \frac{\delta \alpha}{\rho} \right]. \quad (33)$$

На основе этих формул легко установить зависимости между средними квадратическими погрешностями m_R и m_k, характеризующими качество построения кривой, и средними квадратическими погрешностями m_a, m_b и m_α отложения отдельных разбивочных элементов в способе продолженных хорд. Они имеют следующий вид:

$$(m_R^2)_n = \frac{a^2}{R^2} D_n^2 \left[(3^{2(n-1)} + Q_n^2)\, m_a^2 + E'^2_n m_b^2 + 4a^2\, G_n^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} \right] + \frac{(R - aC_n)^2}{R^2} \left[(3^{2(n-1)} + P_n^2)\, m_a^2 + F'^2_n\, m_b^2 + 4_a^2 H_n^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} \right], \quad (34)$$

$$(m_k^2)_n = \frac{(R - aC_n)^2}{R^2} \left[(3^{2(n-1)} + Q_n^2)\, m_a^2 + E'^2_n\, m_b^2 + 4a^2\, G_n^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} \right] + \frac{a^2}{R^2} D_n^2 \left[(3^{2(n-1)} + P_n^2)\, m_a^2 + F'^2_n\, m_b^2 + 4a^2\, H_n^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2} \right]. \quad (35)$$

В тех случаях детальной разбивки кривой, когда хорда a мала по сравнению с радиусом $R \left(\frac{a}{R} < 0{,}05 \right)$, а число выносимых точек невелико ($n < 5$), вместо (34) и (35) можно пользоваться их упрощенным вариантом

$$(m_k^2)_n = (3^{2(n-1)} + P_n^2)\, m_a^2 + F'^2_n\, m_b^2 + 4a^2\, H_n^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}, \quad (36)$$

$$(m_k^2)_n = (3^{2(n-1)} + Q_a^2)\, m_a^2 + E'^2_n\, m_b^2 + 4a^2\, G_n^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}. \quad (37)$$

Полученные формулы применимы, естественно, и для расчета точности построения круговой кривой по известным погрешностям разбивочных элементов, и для определения требуемой точности построения отдельных разбивочных элементов при заданной точности построения кривой. Так, по (34) можно подсчитать, что при детальной разбивке круговой кривой радиуса $R = 500$ м через интервал 10 м с погрешностями отложения хорды $m_a = \pm 0{,}01$ м, промежуточного перемещения $m_b = \pm 0{,}01$ м и построения створа $m_\alpha = \pm 4$ радиус кривой во второй точке будет построен с погрешностью $\pm 0{,}04$ м, в третьей — $\pm 0{,}13$ м, в четвертой — $\pm 0{,}40$ м, в пятой — $\pm 1{,}20$ м и т. д. По (34) можно также установить, что для того, чтобы обеспечить точность построения радиуса кривой в точке 5 не хуже $\pm 0{,}50$ м, погрешности m_a и m_b должны быть меньше $\pm 0{,}005$ м, а погрешность m_α — меньше ± 2.

Значения коэффициентов формул (34) и (35) при $a = 5$ м и $R = 100$ м

Коэффициент	Номера выносимых точек кривой			
	2	3	4	5
C_n'	0,15	0,70	2,43	7,72
D_n	0,99	3,94	12,75	39,14
E_n'	0,10	0,50	1,79	5,76
F_n'	1,00	3,97	12,85	39,47
G_n	0,05	0,30	1,15	3,78
H_n	1,00	3,98	12,92	39,71
C_n	0,20	0,45	0,79	1,27
D_n	1,99	2,96	3,90	4,80

Расчеты по (34)—(37) удобнее всего выполнять на простейших ЭВМ. Однако возможно и другое решение задачи — для заданных значений R, a и n на ЭВМ рассчитать вспомогательные таблицы величин C_n', D_n', E_n', ..., D_n, образец которых показан, и пользоваться ими при вычислении m_R и m_k на микрокалькуляторах.

Список литературы: 1. *Ганьшин В. Н., Хренов Л. С.* Таблицы для разбивки круговых и переходных кривых. — Киев : Будівельник, 1974. 2. *Гожий А. В., Журавель А. А., Туряница И. А.* Результаты практического сравнения различных способов детальной разбивки круговой кривой. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 3. *Гожий А. В.* Об оценке точности детальной разбивки круговой кривой способом прямоугольных координат. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 32. 4. *Гожий А. В.* Общий принцип оценки точности детальной разбивки круговой кривой различными способами. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 36.

Статья поступила в редколлегию 13. 01. 83