УДК 528.16:528.335.2

В. В. КОТОВ

УПРОЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РАЗДЕЛЬНО УРАВНОВЕШИВАЕМЫХ УГЛОМЕРНЫХ ХОДОВ

На территории современных городов и сел находится большое количество строений и коммуникаций. Чтобы в таких условиях можно было уверенно выполнять работы по реконструкции старых и строительству новых сооружений и коммуникаций, подготовку разбивочных данных необходимо производить с аналитической точностью. Отсюда материалы съемок, трассировок и разбивок, которые производятся на застроенных территориях, должны содержать достаточное количество аналитических данных, удовлетворяющих определенной точности. В свою очередь это предъявляет повышенные требования и к точности проложения угломерных ходов, являющихся основным видом геодезического обоснования съемочных, трассировочных и разбивочных работ на застроенных территориях.

Ответить на вопрос, удовлетворяет ли конкретный ход требуемой точности, можно лишь произведя его оценку. Таким образом, оценку точности и полигонометрических, и теодолитных ходов следует считать такой же необходимостью, как и их уравнивание.

В геодезической практике наиболее распространенным является раздельный способ уравнивания угломерных ходов. Однако оценка точности уравновешенных величин при этом способе крайне затруднена. Известные в настоящее время формулы для оценки точности указанных ходов ([2, 11, 12] и др.) ввиду сложности имеют лишь теоретическое значение и не находят практического применения на производстве. Поэтому необходимо разработать такие упрощенные способы оценки точности угломерных ходов, которые по затратам труда не превосходили бы затрат на их уравнивание.

Ф. Н. Красовский установил [8], что для практических целей среднюю квадратическую ошибку функции, полученной из упрощенного уравнивания, можно находить по формуле

$$m_{x'}^2 = m_x^2 + (x' - x)^2, \tag{1}$$

где x' — значение функции, полученное из упрощенного уравнивания, x — значение этой функции, полученное из уравнивания по способу наименьших квадратов.

В результате исследований, выполненных за последние годы [10, 1, 9, 4], формула (1) получила достаточно глубокое теоретическое обоснование.

Применяя эту формулу для оценки точности координат раздельно уравновешенных угломерных ходов, получаем

$$\left.\begin{aligned} m'^2_{x_k} &= m^2_{x_k} + (v_{x_k} - v'_{x_k})^2, \\ m'^2_{y_k} &= m^2_{y_k} + (v_{y_k} - v'_{y_k})^2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где v'_{x_k} и v'_{y_k} — поправки соответственно в абсциссу и ординату k-й точки при упрощенном уравнивании хода; v_{x_k} и v_{y_k} — поправки в абсциссу и ординату k-й точки при уравнивании хода по способу наименьших квадратов.

Для случая равностороннего вытянутого хода формулы (2) примут вид

$$\left.\begin{aligned} m'^2_{t_k} &= m^2_{t_k} = \mu^2 s\,\frac{k(n-k)}{n} \\ m'^2_{u_k} &= m^2_{u_k} + (v_{u_k} - v'_{u_k})^2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где k — номер оцениваемой точки от начала хода, не считая исходной; n — число сторон в ходе.

При уравнивании равностороннего вытянутого полигонометрического хода по способу наименьших квадратов поправка в ординату k-й точки вычисляется по формуле

$$v_{u_k} = \frac{u \cdot k\,(k+1)\,(3n-2k+2)}{n\,(n+1)\,(n+2)}, \tag{4}$$

где u — поперечная невязка хода.

При упрощенном уравнивании такого хода поправка в ординату k-й точки находится по формуле

$$v'_{u_k} = \frac{u \cdot k}{n}. \tag{5}$$

Отсюда

$$v_{u_k} - v'_{u_k} = \frac{u \cdot k}{n}\left\{\frac{(k+1)(3n-2k+2)}{(n+1)(n+2)} - 1\right\} = \frac{u \cdot k(n-k)\,(2k-n)}{n(n+1)\,(n+2)}. \tag{6}$$

Средняя квадратическая ошибка ординаты k-й точки при уравнивании хода по способу наименьших квадратов определяется по формуле

$$m^2_{u_k} = \left(\frac{m_\beta}{\rho} s\right)^2 \cdot Q_k, \tag{7}$$

где

$$Q_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{k^2\,(k+1)^2}{4\,(n+1)} - \frac{k^2\,(k+1)^2\,(3n+2k+2)^2}{12\,n\,(n+1)\,(n+2)}. \tag{8}$$

С учетом (6) и (7) формула для определения m'_{u_k} будет иметь вид

$$m'^2_{u_k} = \left(\frac{m_\beta}{\rho} s\right)^2 Q_k + \frac{u^2 k^2\,(n-k)^2 (2k-n)^2}{n^2\,(n+1)^2 (n+2)^2} =$$

$$= \left(\frac{m_\beta}{\rho} s\right)^2 Q_k \left\{1 + \frac{k^2\,(n-k)^2\,(2k-n)^2}{Q_k (n+1)^2\,(n+2)^2}\left(\frac{u \cdot \rho}{[s] m_\beta}\right)^2\right\}. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k^2\,(n-k)^2\,(2k-n)^2}{Q_k\,(n+1)^2\,(n+2)^2} &= p_к \\ \left(\frac{u \cdot \rho}{[s]\,m_\beta}\right)^2 &= q \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Таблица 1

Значения коэффициентов p

k	n = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0,03	0,10	0,17	0,24	0,30	0,35	0,40	0,44	0,47	0,50	0,53	0,56	0,59	0,61	0,63	0,65	0,66	0,67
2		0,03	0	0,02	0,06	0,10	0,14	0,18	0,22	0,26	0,29	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46
3			0,10	0,02	0	0,01	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,20	0,22	0,23	0,25	0,26	0,28	0,29
4				0,17	0,06	0,01	0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,09	0,11	0,13	0,14	0,16	0,17	0,18	0,19
5					0,24	0,10	0,03	0,01	0	0	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	0,12
6						0,30	0,14	0,06	0,02	0	0	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
7							0,35	0,18	0,09	0,04	0,02	0	0	0	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03
8								0,40	0,22	0,12	0,06	0,03	0,01	0	0	0	0	0,01	0,01
9									0,44	0,26	0,15	0,09	0,04	0,02	0,01	0	0	0	0
10										0,47	0,29	0,18	0,11	0,06	0,03	0,01	0	0	0
11											0,50	0,32	0,20	0,13	0,07	0,04	0,02	0,01	0
12												0,53	0,34	0,22	0,14	0,08	0,05	0,02	0,01
13													0,56	0,36	0,23	0,16	0,10	0,06	0,03
14														0,59	0,38	0,25	0,17	0,11	0,07
15															0,61	0,40	0,26	0,18	0,12
16																0,63	0,42	0,28	0,19
17																	0,65	0,44	0,29
18																		0,66	0,46
19																			0,67

Тогда формула (9) запишется

$$m_{u_k}'^2 = \left(\frac{m_\beta}{\rho} s\right)^2 Q_k (1 + qp_k) \tag{11}$$

или с учетом обозначений, принятых в работе [6],

$$m_{u_k}' = \frac{m_\beta}{\rho} s \frac{k(n-k)}{n} C_k \sqrt{1 + qp_k}. \tag{12}$$

Значения коэффициентов p, входящих в формулу (12), даны в табл. 1. Для большего удобства эти коэффициенты могут быть помещены в одной таблице с приведенными в [6] коэффициентами C.

Формулы для определения m_{t_k}' и m_{u_k}' в неравносторонних вытянутых ходах с учетом обозначений, принятых в [6], будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} m_{t_k}' &= \mu\sqrt{A_k} \\ m_{u_k}' &= \frac{m_\beta}{\rho} c_k' A_k \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где

$$A_k = \frac{[s]_1^k [s]_n^{k+1}}{[s]_1^n}, \quad C_k' = C_k \sqrt{1 + qp_k}.$$

В табл. 2 приведен пример оценки точности с помощью полученных формул вытянутого полигонометрического хода второго разряда.

Этот пример является весьма показательным. Из него вытекает, что упрощенный способ уравнивания угломерных ходов значительной протяженности при больших относительных невязках $u/[s]$ приводит к заметному снижению точности уравненных значений координат. Причем наибольшие искажения получают координаты точек, расположенные ближе к концам хода. Весьма нежелательным также является сосредоточение к концам хода длинных сторон.

Формулы (13) могут быть использованы также для оценки точности и ломаных ходов. В этом случае значения u можно заменить значениями f_u, найденными из соотношения

$$\frac{f_u^2}{f_t^2} = \frac{M_\beta^2}{M_s^2}, \tag{14}$$

где M_β и M_s — составляющие предвычисленной невязки хода M, обусловленные соответственно ошибками угловых и линейных измерений; f_u и f_t — составляющие истинной невязки хода f_s, обусловленные ошибками угловых и линейных измерений.

Принимая во внимание, что для ломаных ходов, предварительно уравненных за условие дирекционных углов,

$$M_\beta^2 = \left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2 [D_{0i}^2], \quad M_s^2 = \mu^2 [s] \text{ и } f_u^2 + f_t^2 = f_s^2,$$

из равенства (14) найдем

$$f_u = \frac{f_s}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu \cdot \rho}{m_\beta}\right)^2 \frac{[s]}{[D_{0i}^2]}}}. \tag{15}$$

Для определения $[D_{0i}^2]$ можно рекомендовать упрощенный способ, изложенный в работе [7].

Формулы (12) и (13) применяются для оценки точности только конкретно уравненных ходов, для которых известны истинные невязки u или f_s. При оценке точности проектируемых ходов истинные невязки в этих формулах надо заменить их средними квадратическими предвы-

Таблица 2

Оценка точности вытянутого полигонометрического хода, уравновешенного упрощенным способом

№ точек	S, м	$[s]_1^k$	$[s]_n^{k+1}$	A	$qp+1$	C'	m_t, мм	m_u, мм I*	m_u, мм II
1			2590						
	400								
2		400	2190	338	5,06	2,11	9	27	12
	380								
3		780	1810	545	3,53	1,91	12	40	21
	250								
4		1030	1560	620	2,53	1,75	12	42	26
	100								
5		1130	1460	635	1,93	1,61	13	39	28
	150								
6		1280	1310	645	1,47	1,47	13	37	30
	200								
7		1480	1110	634	1,20	1,36	13	33	30
	100								
8		1580	1010	614	1,07	1,30	12	31	30
	150								
9		1730	860	574	1,00	1,27	12	28	28
	100								
10		1830	760	537	1,07	1,30	12	27	26
	100								
11		1930	660	492	1,20	1,36	11	26	24
	150								
12		2080	510	394	1,47	1,47	10	22	18
	100								
13		2180	410	345	1,93	1,61	9	22	15
	150								
14		2330	260	234	2,53	1,75	8	16	10
	100								
15		2430	160	150	3,53	1,91	6	11	6
	80								
16		2510	80	78	5,06	2,11	4	6	3
	80								
17		2590							

$$\mu=0{,}0005;\quad \frac{u}{[s]}=\frac{1}{10000};\quad m_\beta=8'';\quad \frac{m_\beta\times 10^3}{\rho''}=0{,}0387;\quad q=\left(\frac{206265''}{8\times 10000}\right)^2=6{,}65.$$

* I — Результаты оценки точности по формулам (13), полученные для случая упрощенного уравнивания хода.

II — Результаты оценки точности по формулам; приведенным в работе [6], полученные для случая уравнивания хода по способу наименьших квадратов.

численными значениями. В частности, для равностороннего вытянутого хода следует положить

$$u^2=M_\beta^2=\left(\frac{m_\beta}{\rho}s\right)^2\frac{n(n+1)(n+2)}{12}. \tag{16}$$

В этом случае формула (12) после некоторых преобразований примет вид известной формулы, используемой для оценки точности вытянутых полигонометрических ходов, уравненных упрощенным способом [3],

$$m_{u_k}'^2=\left(\frac{m_\beta}{\rho}s\right)^2\frac{k(n-k)}{12n}\left\{\frac{k(n-k)(n+4)}{n+1}+2\right\}. \tag{17}$$

Полученный вывод является дополнительным подтверждением правильности исходных формул (2). Одновременно отсюда следует, что формула (17) — лишь частный случай формулы (12), когда $u^2=M_\beta^2$, и может применяться для вычисления m'_u только в проектируемых угломерных ходах. В конкретно уравниваемых ходах, в которых u может колебаться от 0 до 2 M_β, средние квадратические ошибки m'_u, вычисленные по формуле (17), не будут соответствовать их действительным значениям. При $u^2 > M_\beta^2$ они будут получаться преуменьшенными, а при $u^2 < M_\beta^2$ — преувеличенными. Например, если после распределения угловой навязки f_β невязка u в конкретном ходе получится равной нулю, то результаты упрощенного и строгого уравнивания совпадут. В этом случае для всех точек хода $m'_u = m_u$, что непосредственно вытекает из формул (12) и (13). Однако если для этого же случая оценку точности хода произвести по формуле (17), то получим значения $m'_u > m_u$, что явно абсурдно. Совершенно очевидно, что аналогичные результаты будут иметь место и при вычислениях для ломаных ходов. Полученные выводы полностью подтвердились при уравнивании ряда искусственных полигонометрических ходов, в углы которых лотерейным способом вводились случайные ошибки, соответствующие нормальному распределению.

Рассмотрим теперь вопрос оценки точности дирекционных углов сторон в уравновешенных ходах. Для этого обратимся к формуле (7). При $k=1$ она примет вид

$$m_{u_1}^2 = \left(\frac{m_\beta}{\rho} s_1\right)^2 \left\{1 - \frac{1}{n+1} - \frac{3n}{(n+1)(n+2)}\right\}. \tag{18}$$

Сравнивая формулу (18) с формулой для определения средней квадратической ошибки дирекционного угла первой стороны хода [4], находим, что

$$m_{\alpha_1} = \frac{\rho}{s_1} m_{u_1}. \tag{19}$$

Совершенно очевидно, что формула (19) будет справедлива для любого хода независимо от способа его уравнивания.

Известно, что для ходов с числом сторон, не превосходящим 20, средние квадратические ошибки дирекционных углов сторон уравновешенного хода мало отличаются друг от друга [13]. Поэтому для практических целей можно ограничиться оценкой точности дирекционных углов только для первой и последней сторон хода.

Применяя формулу (19) для случая, приведенного в табл. 2, находим для случая строгого уравнивания хода

$$m_{\alpha_1} = \frac{\rho''}{400000} 12{,}3 = 6{,}4''. \quad m_{\alpha_{16}} = \frac{\rho''}{80000} 2{,}8 = 7{,}2''.$$

Вычислив m_α непосредственно по формуле, указанной в работе [5] и полагая ход равносторонним, находим

$$m_{\alpha_1} = m_{\alpha_{16}} = 6{,}8''.$$

Для средней стороны хода $m_{\alpha_8} = 8{,}2''$. Сравнивая полученные результаты, видим, что значение средней квадратической ошибки дирекционного угла в 7,2″, которое найдено для наиболее короткой из примыкающих к концам хода сторон, в достаточной степени характеризует точность определения дирекционных углов сторон хода, уравненного строгим способом. Для случая упрощенного уравнения хода будем иметь

$$m'_{\alpha_{16}} = \frac{\rho''}{80000} 6{,}4 = 16{,}5''.$$

Выше мы установили, что наибольшие относительные ошибки за счет нестрогости упрощенного способа уравнивания получаются в координатах точек, расположенных ближе к концам хода. Это обстоятельство можно использовать для выбора способа уравнивания данного конкретного хода. Например, применение упрощенного способа уравнивания можно ограничить условием, при котором

$$\frac{m'_{u_1}}{m_{u_1}} \leqslant 1{,}4, \quad \text{или} \quad \left(\frac{m'_{u_1}}{m_{u_1}}\right)^2 \leqslant 2. \tag{20}$$

Из формул (12) и (13) находим

$$\left(\frac{m'_{u_k}}{m_{u_k}}\right)^2 = 1 + qp_k,$$

откуда следует

$$p_1 q = p_1 \left(\frac{u \cdot \rho}{[s]\, m_\beta}\right)^2 \leqslant 1, \tag{21}$$

где p_1 — коэффициент, соответствующий первой от начала или от конца хода определяемой точке (см. табл. 1).

Таким образом, на основании произведения $p_1 q$ можно выбрать способ уравнивания конкретного хода и установить, какой от этого следует ожидать эффект.

В заключение следует заметить, что рассмотренные в статье формулы для оценки точности раздельно уравновешенных угломерных ходов помимо простоты обладают еще и тем достоинством, что в достаточной степени учитывают и ошибки исходных данных. Это видно из того, что в указанные формулы входят истинные значения невязок, являющиеся, как известно, следствием не только ошибок измерений, но и ошибок исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Визгин А. А. Оценка точности приближенных методов уравнения. — «Геодезия и картография», 1958, № 1.
2. Гордеев А. В. Оценка точности теодолитного хода, уравновешенного упрощенным способом. — Тр. МИИЗ, вып. 2. М., 1957.
3. Гордеев А. В., Шарупич С. Г. Уравновешивание геодезичесиких сетей. М., Геодезиздат, 1961.
4. Зданович В. Г. [и др.]. К вопросу о приближенных способах уравнивания. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 4, М., 1969.
5. Зданович В. Г. Высшая геодезия. М., Гос. научно-техн. изд-во литературы по горному делу, 1961.
6. Котов В. В. Упрощенный способ оценки точности полигонометрических ходов. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 4. М., 1963.
7. Котов В. В. Упрощенный способ расчета точности теодолитных полигонов. — В сб.: Вопросы техники и экономики автомобильного транспорта Красноярского края. Красноярское книжное изд-во, 1966.
8. Красовский Ф. Н. К вопросам об оценке точности триангуляции. — «Геодезист», 1938, № 10.
9. Могильный С. Г. Об оценке приближенных способов уравнивания геодезических измерений. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 5. М., 1964.
10. Никифоров Б. И. Точность приближенных методов уравнивания. — Тр. ВНИМИ, вып. XXII, М., 1950.
11. Рыхлюк Е. И. Оценка точности полигонометрических ходов, уравненных упрощенным способом. — «Геодезия и картография», 1961, № 7.
12. Томутис З. П. Оценка точности при раздельном уравновешивании вытянутого полигонометрического хода. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 6. М., 1958.
13. Чеботарев А. С., Селиханович В. Г., Соколов М. Н. Геодезия. Ч. II. М., Геодезиздат, 1962.

Работа поступила в редколлегию 23 февраля 1971 года. Рекомендована отделом инженерной фотограмметрии Новосибирского научно-исследовательского института прикладной геодезии.