РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 17

УДК 528.22:531.26

*М. И. МАРЫЧ*

# О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МОЛОДЕНСКОГО С ПОМОЩЬЮ РЯДА ТЕЙЛОРА

В работе [2] рассмотрен новый метод решения краевой задачи Молоденского, основанный на использовании зависимости между разложениями аномалий силы тяжести и возмущающего потенциала в ряд Тейлора по степени высот рельефа Земли и малого параметра, устанавливаемой формулой Стокса. Приведены и исследованы формулы, определяющие возмущающий потенциал на физической поверхности Земли в нулевом, первом и втором приближениях Молоденского.

Выполненные выкладки свидетельствуют о распространении полученных результатов на высшие порядки приближений возмущающего потенциала и на входящие сюда приближения радиальных производных аномалий силы тяжести, являющиеся полной аналогией соответствующих приближений возмущающего потенциала.

Мы хотим дать более развернутое и систематизированное изложение метода, а также нагляднее осветить его.

**1.** Так как решение задачи не должно зависеть от выбора радиуса отсчетной сферы, то при выводе формул можно предположить, что указанные ряды Тейлора являются сходящимися. Действительно, найденные таким путем значения возмущающего потенциала не должны изменяться с увеличением или с уменьшением высот рельефа Земли на постоянную величину, что снимает наше предположение о сходимости рядов.

Сказанное можно интепретировать следующим образом. Предположение о сходимости названных рядов означает, что мы рассматриваем некоторый элемент гравитационного поля, соответствующий точечной или элементарной массе, произвольно расположенной в теле Земли, а радиус отсчетной сферы выбран так, что высоты рельефа Земли оказались меньше расстояний от точек физической поверхности Земли к данной массе. Независимость решения от величины радиуса сферы свидетельствует о том, что для всех элементов, составляющих измеренные аномалии силы тяжести, может быть принята одна и та же фиксированная отсчетная сфера, произвольно выбранного радиуса. Таким образом, значения возмущающего потенциала, найденные по измеренным аномалиям силы тяжести, будут равны тем значениям возмущающего потенциала, которые являются результатом раздельно выполненных вычислений по всем элементам аномалий силы тяжести при отсчетных сферах, обеспечивающих сходимость разложений в ряд Тейлора.

Итак, возмущающий потенциал на физической поверхности Земли разложим в ряд Тейлора по степеням высот рельефа Земли.

$$T_c = T - \frac{\partial T}{\partial \rho} H + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} - \ldots, \quad (1)$$

це $T_c$ — значение возмущающего потенциала в точках отсчетной сферы с; возмущающий потенциал $T$ и его радиальные производные $\frac{\partial T}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}$ и т. д. относятся к физической поверхности Земли. Если этот ряд одится в каждой точке физической поверхности Земли, то очевидно

$$T_c = \frac{R}{4\pi} \int (\Delta g)_c [s(\psi) - 1]\, d\sigma, \tag{2}$$

е

$$(\Delta g)_c = \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} H + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2} H^2 - \cdots \tag{3}$$

Таким образом, величина $T_c$, представляющая собой разложение мущающего потенциала в ряд Тейлора (1), может быть записана виде формулы Стокса (2), в которой обкладка интеграла есть разжение аномалий силы тяжести в ряд Тейлора. Конечно, на основе нятого предположения о сходимости ряда (1) ряд (3) является же сходящимся.

Запишем соотношение (2) в виде формулы для вычислений последательных приближений возмущающего потенциала на физической ерхности Земли:

$$T = \frac{R}{4\pi} \int \left( \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} H + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2} H^2 - \cdots \right) [s(\psi) - 1]\, d\sigma + \\ + \frac{\partial T}{\partial \rho} H - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{d\rho^2} H^2 + \cdots \tag{4}$$

Если приближения возмущающего потенциала построить так, чтоони не зависели от выбора радиуса отсчетной сферы и в то же ия были последовательными приближениями формулы (4), то пом такие приближения, которые в пределах при неограниченном астании номера приближения приводят к точным значениям возающего потенциала.

Этому обязательному требованию независимости результата вычисй от принятой величины радиуса отсчетной сферы отвечают прижения Молоденского [3], полученные путем разложения возмущаю потенциала по степеням малого параметра.

Данному принципу построения приближений соответствует следую процесс вычислений. Сначала находим возмущающий потенциал етом лишь первого члена $\Delta g$ подынтегрального ряда и получаем вое, или так называемое стоксово приближение $T_0$, а затем поправ-, $T_2$ и т. д. к $T_0$. Первая из них есть результат учета в формуле ервых радиальных производных аномалии силы тяжести $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0$ змущающего потенциала $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_0$, найденных в стоксовом приении.

еличина $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0$ есть нулевое приближение формулы для $\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}$, гичной формуле (4). Эту формулу мы получим, если вместо ряда ра (1) для $T$ напишем такой же ряд для $\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}$ и вместо формулы

Стокса (2) воспользуемся известной формулой Нумерова для вертикального градиента аномалии силы тяжести. $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_0$ находим из граничного условия для возмущающего потенциала, в который вместо $T$ подставляем $T_0$ и вместо $\rho = R + H$ подставляем $R$. Следующие поправки к $T_0$ вычисляем аналогично.

Таким образом, решение основной задачи Молоденского выражается последовательными приближениями ряда Тейлора (4), в которые вместо точных значений радиальных производных аномалии силы тяжести и возмущающего потенциала входят их приближения. Причем с возрастанием порядка производных порядок приближений уменьшается, и производные наивысшего порядка выражаются лишь стоксовыми приближениями.

Поэтому при расходящемся ряде Тейлора наши приближения сильно отличаются от формулы (4). Однако, принимая во внимание, что приближения возмущающего потенциала не зависят от величины радиуса сферы, всегда можно полагать, что отсчетная сфера проходит выше ядра аномальной массы, и, следовательно, они приводят к сходящемуся ряду Тейлора, в котором члены высокого порядка пренебрегаемо малы. В этом проявляется эффект устранения отрицательного влияния расходимости рядов, использованных при решении задачи Молоденского.

Чтобы показать величину описанного влияния на вычисляемое значение возмущающего потенциала, найдем изменение формулы (4), вызванное изменением высот $H$ на некоторую постоянную величину $\Delta H$. Примем в качестве высот рельефа Земли высоты $H' = H + \Delta H$ ($R' = R - \Delta H$) и рассмотрим ряды

$$T'_{c'} = T - \frac{\partial T}{\partial \rho} H' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} H'^2 - \cdots,$$

$$T''_{c} = \frac{R'}{4\pi} \int \left(\Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} H' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2} H'^2 - \cdots\right) [s(\psi) - 1]\, d\sigma.$$

Приведем их к виду

$$T'_{c'} = T_c = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_c \Delta H + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}\right)_c \Delta H^2 - \cdots, \tag{5}$$

$$T''_{c'} = T_c - \frac{\Delta H}{R} T_c + \frac{R'}{4\pi} \int \left[-\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_c \Delta H^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_c \Delta H^2 - \cdots \right] [s(\psi) - 1]\, d\sigma. \tag{5'}$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial^k T}{\partial \rho^k}\right)_c = \frac{\partial^k T}{\partial \rho^k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-k)!} \frac{\partial^n T}{\partial \rho^n} H^{n-k},$$

$$\left(\frac{\partial^k \Delta g}{\partial \rho^k}\right)_c = \frac{\partial^k \Delta g}{\partial \rho^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-k)!} \frac{\partial^n \Delta g}{\partial \rho^n} H^{n-k}$$

($k = 1, 2, \ldots$) суммы, представляющие собой разложения в ряд Тейлора по степеням высот $H$ радиальных производных возмущающего потенциала и аномалий силы тяжести. Дифференцируя формулу Стокса (2) по направлению радиуса-вектора $\rho$, находим

$$\left(\frac{\partial^k \Delta T}{\partial \rho^k}\right)_c = \frac{k}{4\pi}\int\left(\frac{\partial^{k-1}\Delta g}{\partial \rho^{k-1}}\right)_c [s(\psi)-1]\,d\sigma + \frac{R}{4\pi}\int\left(\frac{\partial^k \Delta g}{\partial \rho^k}\right)_c [s(\psi)-1]\,d\sigma \quad (6)$$

$(k=1, 2, \ldots)$.

Подставляя эти выражения в (5), а (2) во второй член формулы (5′) и сопоставляя между собой ряды (5) и (5′), получаем

$$T'_{c'} - T''_{c'} = \delta_k,$$

где

$$\delta_k = \frac{(-1)^k \Delta H^{k+1}}{4\pi k!}\int\left(\frac{\partial^k \Delta g}{\partial \rho^k}\right)_c [s(\psi)-1]\,d\sigma \approx \frac{(-\Delta H)^k}{k!}\,\frac{\partial^k T}{\partial \rho^k}\,\frac{\Delta H}{R} \quad (7)$$

есть искомое изменение возмущающего потенциала, вызванное заменой высот $H$ высотами $H'$ в формуле (4), в которой учитываются все радиальные производные до $k$-го порядка включительно. Отметим, что данное выражение вполне соответствует результату, полученному в [1] без учета рельефа Земли.

Таким образом, если указанная замена высот не приводит к расходимости рядов (1) и (3) в исследуемой точке, то величина $\delta_k$ с возрастанием числа $k$ становится как угодно малой. Если же в данной точке названные ряды расходятся, то с возрастанием $k$ величина $\delta_k$ увеличивается и становится как угодно большой.

При вычислениях возмущающего потенциала согласно формуле (4) всегда возникает необходимость обрывать ряды и мы имеем дело лишь с некоторым количеством их первых членов. В случае, когда эти ряды сходятся во всех точках физической поверхности Земли, обрыв их опасений не вызывает ($\delta_k \to 0$) и в процессе вычислений можно получить как угодно точный результат. Однако при произвольном распределении масс внутри Земли различие между найденным и искомым результатами может стать и неограниченно большим ($\delta_k \to \infty$). Для реальной Земли указанное требование является слишком жестким и не выполняется, а это и есть главное препятствие использования ряда Тейлора при вычислении возмущающего потенциала. В данном методе определения возмущающего потенциала указанное препятствие устраняется с помощью параметра Молоденского.

Независимо от нас [1, 2] немецкий ученый X. Мориц рассмотрел аналогичный метод решения этой же задачи, основанный также на использовании ряда Тейлора и малого параметра $k$ [5]. С помощью асимптотических рядов и разложений возмущающего потенциала по степеням параметра $k$ он показывает, что формулы Молоденского и формулы Бровара эквиваленты его формулам. Это вполне согласуется с нашими выводами [1, 2]. Однако указанную выше роль параметра $k$ при построении своих формул X. Мориц во внимание не принимает и, видимо, поэтому не находит, что они не обусловлены возможностью аналитического продолжения гравитационного потенциала внутрь масс Земли, осуществляемого с помощью ряда Тейлора.

Следует отметить, что в работе [6] X. Мориц пришел к выводам, в основном совпадающим с нашими выводами [1, 2].

2. Получим формулы для вычислений возмущающего потенциала, которые следуют из разложения этого потенциала в ряд Тейлора (4) и по степеням параметра $k\,(0 \leqslant k \leqslant 1)$

$$T_0 + kT_1 + k^2 T_2 + \ldots = \frac{R}{4\pi}\int\left\{\Delta g - \left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 + k\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1 + \ldots\right] kH + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0+\ldots\right]k^2H^2-\ldots\Bigg\}[s(\psi)-1]\,d\sigma+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_0+k\left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_1+\ldots\right]kH-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\rho^2}\right)_0+\ldots\right]k^2H^2+\ldots \tag{8}$$

Приравнивая между собой члены обеих частей равенства, в одинаковой степени содержащие $k$, имеем

$$T_0=\frac{R}{4\pi}\int\Delta g\,[s(\psi)-1]\,d\sigma; \tag{9}$$

$$T_1=\frac{R}{4\pi}\int\left[-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\Delta}\right)_0 H\right][s(\psi)-1]\,d\sigma+\left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_0 H; \tag{10}$$

$$T_2=\frac{R}{4\pi}\int\left[-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1 H+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0 H^2\right][s(\psi)-1]\,d\sigma+\left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_1 H-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\rho^2}\right)_0 H^2; \tag{11}$$

$$T_n=\frac{R}{4\pi}\int\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{\partial^m\Delta g}{\partial\rho^m}\right)_{n-m}H^m[s(\psi)-1]\,d\sigma+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\left(\frac{\partial^m T}{\partial\rho^m}\right)_{n-m}H^m. \tag{12}$$

Сумма всех членов данного разложения

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}T_n \tag{13}$$

дает возмущающий потенциал на физической поверхности Земли.

Итак, мы получили формулы для вычислений последовательных приближений возмущающего потенциала. Первая из них (9) совпадает с нулевым приближением Молоденского [3]. Это обычная формула Стокса (стоксово приближение), она соответствует, как это видно из ее вывода, вычислению возмущающего потенциала на физической поверхности Земли без учета рельефа. Остальные формулы дают последовательные поправки к стоксову приближению.

Чтобы получить формулы для последовательных приближений радиальных производных аномалии силы тяжести, воспользуемся рядом Тейлора и соотношениями [1]

$$\left(\frac{\partial^i\Delta g}{\partial\rho^i}\right)_c=\frac{1}{2\pi R}\int\left[\left(\frac{\partial^{i-1}\Delta g}{\partial\rho^{i-1}}\right)_c-\left(\frac{\partial^{i-1}\Delta g}{\partial\rho^{i-1}}\right)_c^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3}-\frac{i+1}{R}\left(\frac{\partial^{i-1}\Delta g}{\partial\rho^{i-1}}\right)_c \tag{14}$$

$(i=1, 2, \ldots)$ точно так же, как мы воспользовались формулой Стокса при нахождении возмущающего потенциала. Разлагая первую производную $\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}$ в ряд Тейлора по степеням высот рельефа Земли

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_c=\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}-\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}H+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\Delta g}{\partial\rho^3}H^2-\ldots$$

и принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_c=\frac{1}{2\pi R}\int\left[(\Delta g)_c-(\Delta g)_c^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3}-\frac{2(\Delta g)_c}{R},$$

где $(\Delta g)_c$ есть разложение аномалии силы тяжести в ряд Тейлора (3), получаем

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi R}\int [(\Delta g)_c - (\Delta g)_c^{(0)}]\frac{d\sigma}{r^3} - \frac{2(\Delta g)_c}{R} + \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}H - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \Delta g}{\partial \rho^3}H^2 + \ldots$$

Эта формула аналогична формуле (4). Представляя ее в виде разложения по степени параметра $k(0 \leqslant k \leqslant 1)$, находим соотношения, аналогичные (8). Далее, приравнивая между собой члены, содержащие $k$ в одинаковой степени, получаем формулы, определяющие последовательные приближения значений первой радиальной производной аномалии силы тяжести в точках физической поверхности Земли. Итак, имеем

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int (\Delta g - \Delta g^{(0)})\frac{d\sigma}{r^3} - \frac{2}{R}\Delta g; \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1 = \frac{1}{2\pi R}\int \left\{-\left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H - \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0^{(0)} H_0\right]\right\}\frac{d\sigma}{r^3} - $$

$$- \frac{2}{R}\left[-\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H\right] + \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0 H; \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n = \frac{1}{2\pi R}\int \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\left[\left(\frac{\partial^m \Delta g}{\partial \rho^m}\right)_{n-m} H^m - \left(\frac{\partial^m \Delta g}{\partial \rho^m}\right)_{n-m}^{(0)} H_0^m\right]\frac{d\sigma}{r^3} -$$

$$- \frac{2}{R}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{\partial^m \Delta g}{\partial \rho^m}\right)_{n-m} H^m + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\left(\frac{\partial^{m+1} \Delta g}{\partial \rho^{m+1}}\right)_{n-m} H^m. \tag{17}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n. \tag{18}$$

Вывод формул для приближений производных второго и более высоких порядков не отличается от вывода формул (15)—(18). Поэтому, не повторяя выкладок, основанных на использовании соотношений (14) и ряда Тейлора, можно сразу записать выражения

$$\left(\frac{\partial^i \Delta g}{\partial \rho^i}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int \left[\left(\frac{\partial^{i-1} \Delta g}{\partial \rho^{i-1}}\right)_0 - \left(\frac{\partial^{i-1} \Delta g}{\partial \rho^{i-1}}\right)_0^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3} - \frac{i+1}{R}\left(\frac{\partial^{i-1} \Delta g}{\partial \rho^{i-1}}\right)_0, \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial^i \Delta g}{\partial \rho^i}\right)_n = \frac{1}{2\pi R}\int \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\left[\left(\frac{\partial^{i+m-1} \Delta g}{\partial \rho^{i+m-1}}\right)_{n-m} H^m - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial^{i+m-1} \Delta g}{\partial \rho^{i+m-1}}\right)_{n-m}^{(0)} H_0^m\right]\frac{d\sigma}{r^3} - \frac{2}{R}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{\partial^{i+m-1} \Delta g}{\partial \rho^{i+m-1}}\right)_{n-m} H^m +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\left(\frac{\partial^{i+m} \Delta g}{\partial \rho^{i+m}}\right)_{n-m} H^m \tag{20}$$

$(n=1, 2, 3, \ldots)$, определяющие

$$\frac{\partial^i \Delta g}{\partial \rho^i} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial^i \Delta g}{\partial \rho^i}\right)_n \tag{21}$$

$(i=1, 2, 3, \ldots)$.

Таким образом, выражения (15)—(18) и (19)—(21), полученные тем же путем, что и выражения (9)—(13), являются их полной аналогией. Процесс вычислений первой радиальной производной аномалии силы тяжести (18) и производных высших порядков (21) такой же, как процесс вычислений возмущающего потенциала. При этом нулевые (стоксовы) приближения производных высших порядков, входящие в формулы (16)—(18) и в (20), (21) (отмеченные нижним индексом «0»), и последовательные поправки к этим приближениям определяются формулами, полученными из (20) для соответствующих значений $i$ и $n$.

Заметим, что при использовании на практике формул (15)—(17) и (19)—(20) их вторыми членами можно пренебречь. В этом случае, как показано в работе [2], формула Остача [4] для вычисления первой поправки Молоденского к стоксову приближению вертикального градиента аномалии силы тяжести (15) (к формуле Нумерова) легко приводится к формуле (16).

Рассмотрим также процесс нахождения приближений радиальных производных возмущающего потенциала.

Дифференцируя граничное условие для возмущающего потенциала

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} = -\Delta g \tag{22}$$

по направлению радиуса-вектора $\rho$, последовательно находим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = -\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho}\Delta g + \frac{6}{\rho^2}T,$$

$$\frac{\partial^3 T}{\partial \rho^3} = -\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} - \frac{8}{\rho^2}\Delta g - \frac{24}{\rho^3}T \tag{23}$$

и т. д.

Представляя соотношение (22), в котором

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} - \dots\right),$$

в виде разложения по степеням параметра $k$ и приравнивая между собой члены обеих частей равенства содержащие $k$ в одинаковой степени, получаем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_0 = -\Delta g - \frac{2T_0}{R}; \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_1 = -\frac{2}{R}\left(T_1 - \frac{H}{R}T_0\right);$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_2 = -\frac{2}{R}\left(T_2 - \frac{H}{R}T_1 + \frac{H^2}{R^2}T_0\right)$$

и т. д.

Таким же путем находим и приближения производных (23). Имеем

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}\right)_0 = -\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 + \frac{2}{R}\Delta g + \frac{6}{R^2}T_0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}\right)_1 = -\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1 - \frac{2H}{R^2}\Delta g + \frac{6}{R^2}T_1 - \frac{12H}{R^3}T_0;$$

$$\left(\frac{\partial^3 T}{\partial \rho^3}\right)_0 = -\left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0 + \frac{2}{R}\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 - \frac{8}{R^2}\Delta g - \frac{24}{R^3}T_0$$

и т. д.

Исследования формул (9)—(13), определяющих последовательные приближения возмущающего потенциала, идентичные исследованию ряда Тейлора (4), связанному с получением величины $\delta_k$ (7), показывают (см. [2]), что результат вычислений не зависит от уменьшения или увеличения радиуса отсчетной сферы, то есть в данном случае $\delta_k=0$. Следовательно, увеличение высот рельефа Земли ($H'=H+\Delta H$, $R'=R-\Delta H$) хотя и приводит к расходимости рядов, использованных при выводе формул для последовательных приближений возмущающего потенциала на физической поверхности Земли (отсчетная сфера, проведенная ранее выше аномальной массы, проходит теперь ниже ее), однако, результат вычислений остается неизменным.

Таким образом доказано, что вопрос о сходимости разложения аномалии силы тяжести или возмущающего потенциала в ряд Тейлора по степеням высот рельефа Земли, а тем самым и вопрос об аналитическом продолжении гравитационного потенциала не обусловливает применимости рассмотренного метода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марыч М. И. К вопросу приведения формулы, определяющей фигуру Земли, к ряду Тейлора. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 9. Изд-во Львовского ун-та, 1969.

2. Марыч М. И. О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 10. Изд-во Львовского ун-та, 1969.

3. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, вып. 131. М., Геодезиздат, 1960.

4. Остач О. М. Об определении вертикального градиента аномалий силы тяжести на физической поверхности Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, вып. 176. М., «Недра», 1969.

5. Moritz H. A new series solution of Molodensky's problem. «Bulletin Géodésique», 1970, № 96.

6. Moritz H. Series Solutions of Molodensky's Problem. Deutsche Geodet. Kommission, Reihe A: Höhere Geodäsie — Heft Nr 70, München, 1971.

Работа поступила в редколлегию 10 мая 1972 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и гравиметрии Львовского ордена Ленина политехнического института.