РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 17

УДК 528.232.24

М. И. РУСИН

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ (ПРИ l И σ, БЛИЗКИХ К 180°)

При решении обратной геодезической задачи на большие расстояния используется вспомогательный сферический треугольник Бесселя и решение выполняется методом последовательных приближений для определения разности долгот на сфере ω или сферической дуги σ. При этом в общем случае достаточно трех-четырех приближений для получения результатов с точностью 0,001″—0,003″ [1].

Однако при $l \to 180°$ сходимость приближений ухудшается, а иногда метод приближений и вовсе не приводит к цели.

Остановимся на этом подробнее. Для определения ω имеем формулу Бесселя

$$\omega = l + \alpha_1 \sin m\, \sigma + \beta_1 \sin m \sin \sigma \cos (2M + \sigma), \tag{1}$$

где углы m и M и сферическая дуга σ определяются выражениями:

$$\sin m = \cos u_1 \sin A_1 = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin \omega}{\sin \sigma}; \tag{2}$$

$$\sin M = \frac{\sin u_1}{\cos m}; \tag{3}$$

$$\cos \sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos \cdot \omega, \tag{4}$$

а α_1 и β_1 — коэффициенты, зависящие от m и от параметров эллипсоида.

Рассмотрим отношение поправочных членов формулы (1). Имеем

$$\frac{\alpha_1 \sin m\sigma''}{\beta_1 \sin m \sin \sigma \cos (2M + \sigma)} \approx \frac{\sigma''}{167'' \cos^2 m \sin \sigma \cos (2m + \sigma)}, \tag{5}$$

а при малых значениях дуги σ, приняв $\sin \sigma = \frac{\sigma''}{\rho''}$,

$$\frac{\rho''}{167'' \cos^2 m \cos (2M + \sigma)}. \tag{5'}$$

Отношения (5) и (5′) больше единицы, следовательно, второй поправочный член формулы (1) всегда меньше первого. Это обстоятельство позволяет ограничиться при оценке точности соответствующих приближений первым поправочным членом формулы (1).

Запишем формулу (1) в таком виде:

$$(\omega - l)'' = \alpha_1 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sigma''}{\sin \sigma} \sin [l + (\omega - l)],$$

а после разложения $\sin[l+(\omega-l)]$ в ряд

$$(\omega-l)'' = \alpha_1 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sigma''}{\sin\sigma} \sin l \left[1 + \frac{(\omega-l)''}{\rho''} \operatorname{ctg} l - \right.$$

$$\left. - \frac{(\omega-l)''^2}{2\rho''^2} - \frac{(\omega-l)''^3}{6\rho''^3} \operatorname{ctg} l + \frac{(\omega-l)''^4}{24\rho''^4} + \ldots \right]. \qquad (6)$$

Применяя метод последовательных приближений для нахождения величины $(\omega-l)$ аналогично [3], выражение (6) приведем к виду

$$(\omega-l)'' = (\omega-l)''_0 + \frac{(\omega-l)''^2_0}{\rho''^2} \operatorname{ctg} l + \frac{(\omega-l)''^3_0}{\rho''^2}\left(\operatorname{ctg}^2 l - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{(\omega-l)''^4_0}{\rho''^3}\left(\operatorname{ctg}^3 l - \frac{5}{3}\operatorname{ctg} l\right) + \frac{(\omega-l)''^5_0}{\rho''^4}\left(\operatorname{ctg}^4 l - \frac{11}{3}\operatorname{ctg}^2 l + \frac{13}{24}\right), \qquad (7)$$

где

$$(\omega-l)''_0 = \alpha_1 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin l}{\sin\sigma} \sigma'' = \alpha_1 \sin m'_0 \sigma''. \qquad (8)$$

При точном значении σ ряд (7) позволяет вычислить величину $(\omega-l)$, а отношение двух смежных членов ряда дает кратность уточнения результата следующим приближением. Так, погрешность второго приближения меньше погрешности первого приближения в

$$\frac{\rho''}{(\omega-l)'' \operatorname{ctg} l} \text{ раз}, \qquad (\text{а})$$

погрешность третьего приближения меньше погрешности второго приближения в

$$\frac{\rho'' \operatorname{ctg} l}{(\omega-l)''\left(\operatorname{ctg}^2 l - \frac{1}{2}\right)} \text{ раз} \qquad (\text{б})$$

и т. д.

Процесс приближений к цели не приведет, если отношение (а) меньше или равно единице. При максимальном значении $(\omega-l)$, равном $2160''$, получим неравенство $\rho'' \leqslant 2160'' \operatorname{ctg} l$, откуда $\operatorname{ctg} l \geqslant \left(\frac{\rho''}{2160''} = 95{,}5\right)$. Этому значению соответствует разность долгот $l = 179°24'$.

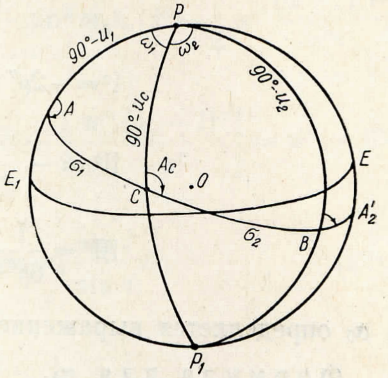
Таким образом, при значении $\operatorname{ctg} l$, близком к нулю, метод приближений быстро приводит к цели; при $\operatorname{ctg} l = 1$ каждое последующее приближение уточняет результат примерно в сто раз; при l и σ, стремящихся к 180°, сходимость приближений резко ухудшается и в области $179°24' \leqslant (l, \sigma) \leqslant 180°$ нарушается совсем. Усовершенствования, вносимые многими авторами в метод Бесселя, при значениях l и σ, близких к 180°, также эффекта не дают.

Плохая сходимость приближений при решении обратной задачи в данном случае объясняется наличием в формуле для $(\omega-l)$ синуса малого неизвестного угла m. Ф. Р. Гельмерт писал, что «при приблизительно диаметральном положении точек P_1 и P_2 малый сдвиг долготы одной из них оказывает сильное влияние на связывающий их большой круг, то есть на значение $\sin m$» [2]. Отсюда необходимо по возможности наиболее точно найти в первом приближении аргументы для определения $\sin m-\sigma$ и ω, а также коэффициент α_1.

Для этого частного случая предлагается следующее решение обратной геодезической задачи.

Ф о р м у л а д л я σ.

На геодезической линии, соединяющей точки A и B (см. рисунок), выберем точку C с условием, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega/2$, где ω — разность долгот точек B и A, ω_1 и ω_2 — разности долгот соответственно точек C и A, B и C. Примем обозначения: u_C — широта точки C, A_C — азимут линии AB в точке C, σ_1 и σ_2 — сферические расстояния между точками A—C и C—B соответственно.



Изображение геодезической линии на шаре по Бесселю.

Для треугольников APC и BPC запишем

$$\left.\begin{aligned} \sin\sigma_1 \sin A_C &= \sin\frac{\omega}{2}\cos u_1; \\ \sin\sigma_2 \sin A_C &= \sin\frac{\omega}{2}\cos u_2 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

откуда

$$\sin\sigma_2 = \sin\sigma_1 \frac{\cos u_2}{\cos u_1}. \quad (10)$$

Для этих же треугольников

$$\left.\begin{aligned} \cos\sigma_1 &= \sin u_1 \sin u_C + \cos u_1 \cos u_C \cos\frac{\omega}{2}, \\ \cos\sigma_2 &= \sqrt{1 - \sin^2\sigma_1 \frac{\cos^2 u_2}{\cos^2 u_1}} = \sin u_2 \sin u_C + \cos u_2 \cos u_C \cos\frac{\omega}{2} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

с двумя неизвестными — u_C и σ_1.

Решив систему уравнений (11), получим для широты u_C два значения — первое в виде формулы

$$\operatorname{tg} u_C = \frac{\operatorname{tg} u_2 + \operatorname{tg} u_1}{2\cos\frac{\omega}{2}}, \quad (12)$$

приводимое в [1] как формула С. П. Николаева, второе — в виде

$$\sin u_C = \pm 1, \text{ то есть } u_C = \pm 90°, \quad (13)$$

где знак определяется знаком большей по абсолютному значению широты.

Из уравнений (11) с учетом (13) получаем

$$\sigma_1 = 90° \pm u_1, \quad \sigma_2 = 90° \pm u_2$$

и

$$\sigma = 180° \pm (u_1 + u_2), \quad (14)$$

причем знак перед скобкой тот же, что и знак меньшей по абсолютному значению широты.

Значение σ, определяемое выражением (14), следует считать приближенным — σ_0. Запишем

$$\cos\sigma_0 = -\cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 \quad (15)$$

и вычтем его из (4). Получим

$$\cos\sigma - \cos\sigma_0 = \cos u_1 \cos u_2 (1 + \cos\omega)$$

или

$$\sin\frac{1}{2}(\sigma - \sigma_0) = -\frac{\cos u_1 \cos u_2 \cos^2\frac{\omega}{2}}{\sin\left[\sigma_0 + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_0)\right]}. \quad (16)$$

Разложив синусы в ряды и проведя несложные преобразования, будем иметь

$$(\sigma-\sigma_0)''=\mathrm{I}^{\sigma}+\mathrm{II}^{\sigma}+\mathrm{III}^{\sigma}, \tag{17}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{I}^{\sigma} &= -2\rho''\cos u_1\cos u_2\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sin\sigma_0},\\
\mathrm{II}^{\sigma} &= -\frac{1}{2\rho''}\mathrm{I}^{\sigma^2}\operatorname{ctg}\sigma_0,\\
\mathrm{III}^{\sigma} &= \frac{1}{6\rho''^2}\mathrm{I}^{\sigma^3}(1+3\operatorname{ctg}^2\sigma_0),
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

а σ_0 определяется выражением (14).

Ф о р м у л а д л я α_1.

Выражение, определяющее коэффициент α_1, имеет вид

$$\alpha_1=A+B\cos^2 m+C\cos^4 m, \tag{19}$$

где $A=\frac{e^2}{2}\left(1+\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4+\ldots\right)$,

$$B=-\frac{e^4}{16}(1+e^2+\ldots),\qquad C=\frac{3e^6}{128}+\ldots,$$

а угол m, определяемый формулой (2), является функцией неизвестных ω и σ.

Найдем выражение для α_1 в функции l и σ_0.

Запишем тождество

$$\alpha_1=\alpha_1^0+(\alpha_1-\alpha_1^0), \tag{20}$$

где α_1^0 вычисляется при значениях $\omega=l$, $\sigma=\sigma_0$. Подставив в тождество (20) значения α_1 и α_1^0, согласно выражению (19) имеем

$$\alpha_1=\alpha_1^0+B\cos^2 u_1\cos^2 u_2\left(\frac{\sin^2 l}{\sin^2\sigma_0}-\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\sigma}\right). \tag{21}$$

Перейдем от σ и ω к σ_0 и l и разности $\omega-l$. Для этого получены формулы:

$$\sigma-\sigma_0=(\omega-l)\sin m_0\left[1+\frac{\omega-l}{2}\operatorname{ctg} l(1-\sin m_0\operatorname{ctg}\sigma_0\operatorname{tg} l)\right], \tag{22}$$

$$\frac{\sin^2 l}{\sin^2\sigma_0}-\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\sigma}=-(\omega-l)\frac{\sin^2 l}{\sin^2\sigma_0}(2\operatorname{ctg} l-2\sin m_0\operatorname{ctg}\sigma_0), \tag{23}$$

где

$$\sin m_0=\cos u_1\cos u_2\frac{\sin l}{\sin\sigma_0}.$$

С учетом (22), (23) выражение (21) принимает вид

$$\alpha_1=\alpha_1^0-B(\omega-l)\sin^2 m_0\,.\,k_0, \tag{24}$$

где

$$k_0=2\operatorname{ctg} l-2\sin m_0\operatorname{ctg}\sigma_0. \tag{25}$$

Формула для $\omega - l$.

Подставив в формулу (6) значение коэффициента α_1, согласно выражению (24), получим

$$(\omega - l)'' = w'' + w'' \frac{(\omega - l)''}{\rho''} \operatorname{ctg} l - w'' \frac{(\omega - l)''}{\rho'' \alpha_1^0} \sin^2 m_0 k_0 . B - \frac{1}{2} w'' \frac{(\omega - l)''^2}{\rho''^2},$$

или

$$(\omega - l)'' \left[1 - \frac{w''}{\rho''} \operatorname{ctg} l + \frac{w''}{\rho'' \alpha_1^0} \sin^2 m_0 \cdot k_0 \cdot B + \frac{1}{2} \frac{w''}{\rho''} \frac{(\omega - l)''}{\rho''} \right] = w'', \tag{26}$$

где

$$w'' = \alpha_1^0 \sin m_0' \sigma'' = \alpha_1^0 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin l}{\sin \sigma} \sigma''. \tag{27}$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\alpha_1^0} \sin^2 m_0 k_0 \cdot B \\ k_2 &= (\operatorname{ctg} l - k_1) \frac{1}{\rho''} \\ k_3 &= (1 + 2k_1 \operatorname{ctg} l) \frac{1}{2\rho''^2} \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

то выражению (26) можно придать вид

$$(\omega - l)'' = \frac{w''}{1 - w'' [k_2 - (\omega - l)'' k_3}. \tag{29}$$

К значению $\omega - l$, вычисленному по (29), необходимо прибавить величину II^l, учитывающую второй поправочный член формулы (1).

Решение обратной геодезической задачи с полученными формулами выполняется в такой последовательности. Определяем σ_0 согласно (14), а с ним $\sin m_0$ и коэффициент α_1^0. Теперь по (29) последовательными приближениями вычисляем $\omega - l$ и ω. Каждое приближение выполняется так: 1) имея σ, находим по (27) w''; 2) учитывая в знаменателе (29) первые два члена, вычисляем приближенное значение $\omega - l$; 3) с учетом всех членов формулы (29) определяем значение $\omega - l$ данного приближения и ω, после чего по (17) вычисляем σ.

Аналогично находим следующее приближение. Таких двух приближений обычно достаточно для получения результата с точностью $0{,}001''$.

Вычисления несколько можно упростить, если в выражении для w значение σ заменить его приближенным значением и поправкой к нему согласно (17). Тогда формула для $\omega - l$ имеет вид

$$(\omega - l)'' = \frac{W_0''}{1 - W_0'' k_2 + w_0'' (\omega - l)'' k_3}, \tag{30}$$

где

$$W_0'' = w_0'' (1 + \Delta\sigma'' k_4 + \Delta\sigma''^2 k_5), \tag{31}$$

$$w_0'' = \alpha_1^0 \sin m_0 \sigma_0'' = \alpha_1^0 \cos u_1 \cos u_2 \sin l \frac{\sigma_0''}{\sin \sigma_0}, \tag{32}$$

$$\left. \begin{aligned} k_4 &= \frac{1}{\sigma_0''} - \frac{1}{\rho''} \operatorname{ctg} \sigma_0; \\ k_5 &= \left(\frac{1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \sigma_0 - \frac{\rho''}{\sigma_0''} \operatorname{ctg} \sigma_0 \right) \frac{1}{\rho''^2}. \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

Решение задачи по формуле (30) выполняется так:

1) По известным l, u_1, u_2 определяем w_0 (выражение (32). 2) Приняв W_0, равным w_0, находим в первом приближении $\omega - l$ и ω, а затем по (18) — $\Delta\sigma$. 3) Вычисляем второе приближение: а) по формуле (31) получаем W_0; б) с учетом двух первых членов в знаменателе выражения (30) находим приближенные значения $\omega - l$; в) вычисляем $\omega - l$ по полной формуле (30), далее определяем ω и $\Delta\sigma$.

Аналогично вычисляем следующее приближение.

В последнем приближении по формуле (17) находим σ.

Определение азимутов и длины геодезической линии выполняется по известным формулам.

А. В. Буткевич [1] указал на целесообразность определения величины $180° - \omega$ при l, близком к 180°. Получим формулы для вычисления ω в этом случае.

Выражение (1) без учета второго поправочного члена запишем таким образом:

$$\omega = l + \alpha_1 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sigma}{\sin \sigma} \sin (180° - \omega)$$

или

$$\omega = l + \alpha_1 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sigma (180° - \omega)}{\sin \sigma} - \alpha_1 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sigma}{\sin \sigma} \frac{(180° - \omega)^3}{6}. \quad (34)$$

Отняв левую и правую части последнего равенства от 180°, получим

$$180° - \omega = 180° - l - \alpha_1 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sigma}{\sin \sigma} (180° - \omega) +$$

$$+ \alpha_1 \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sigma}{\sin \sigma} \frac{(180° - \omega)^3}{6}. \quad (35)$$

Решив (35) относительно $(180° - \omega)$, окончательно найдем

$$(180° - \omega)'' = \frac{(180° - l)''}{1 + \frac{w''}{\rho'' \sin l} \left[1 - \frac{(\omega - l)''}{\rho''} k_1 - \frac{(180° - \omega)''^2}{6\rho''^2} \right]}. \quad (36)$$

Если в выражении для w значение дуги σ заменить приближенным его значением и поправкой к нему согласно (17), то формула (36) будет иметь вид

$$(180° - \omega)'' = \frac{(180 - l)''}{1 + \frac{W_0''}{\rho'' \sin l} - \frac{w_0''}{\rho'' \sin l} \left[\frac{(\omega - l)''}{\rho''} k_1 + \frac{(180° - \omega)''^2}{6\rho''^2} \right]}. \quad (37)$$

Решение обратной геодезической задачи с использованием формулы (36) или (37) аналогично решению соответственно по формуле (29) или (30).

Рассмотрим частный случай решения обратной геодезической задачи, когда $u_2 = -u_1$. Значение средней широты здесь равно нулю и формулы, обычно применяемые для решения, не годятся. Не применимы и формулы, полученные выше, так как σ_0, вычисляемое по (14), равно 180°.

Обратимся к рисунку. По условию выбора точки C имеем $\omega_1 = \omega_2$, а с учетом равенства $u_2 = -u_1$ по (11) получаем $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$. Тогда $A_1 = A_2'$ и $l_1 = l_2 = l/2$, где l, l_1, l_2 — разности долгот на эллипсоиде, соответствующие разностям сферических долгот ω, ω_1, ω_2.

Теперь решение задачи между точками A и B можно заменить решением ее между точками A и C или C и B.

Необходимые для этого формулы приобретают вид:

$$\omega_1 = \omega_2 = l_1 + \alpha_1 \sin m\sigma_1 + \frac{1}{2}\beta_1 \sin m \sin 2\sigma_1, \tag{38}$$

$$\cos \sigma_1 = \cos u_1 \cos \omega_1, \tag{39}$$

$$\sin m = \cos u_1 \frac{\sin \omega_1}{\sin \sigma_1}, \tag{40}$$

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{\sin u_1}, \tag{41}$$

$$s = \frac{1}{\alpha}(2\sigma_1 - \beta \sin 2\sigma_1 - \gamma \sin 4\sigma_1). \tag{42}$$

Полученные формулы проверены путем решения численных примеров со следующими исходными данными:

Пример 1. $u_1 = +0°59'47{,}934''$; $u_2 = -1°59'35{,}883''$; $l = 179°44'00{,}000''$;

Пример 2. $u_1 = +0°59'47{,}934''$; $u_2 = +1°01'02{,}872''$; $l = 179°46'17{,}842''$.

Решение обратной геодезической задачи на большие расстояния приобрело в последние годы особую актуальность в связи с развитием ракетной техники, радионавигации, с созданием единой мировой системы координат. Поэтому полученные формулы могут найти практическое применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буткевич А. В. Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. М., «Недра», 1964.

2. Гельмерт Ф. Р. Математические и физические теории высшей геодезии (пер. с нем.), т. I. М., Геодезиздат, 1962.

3. Русин М. И. Использование таблиц интегралов Валлиса при решении геодезических задач на большие расстояния. — Тр. респ. юбилейной научно-техн. конференции по электротехнике. Изд-во Львовского ун-та, 1970.

Работа поступила в редколлегию 13 декабря 1971 года. Рекомендована кафедрой космической геодезии и астрономии Львовского ордена Ленина политехнического института.