РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 17

УДК 528.48

А. Ф. СТОРОЖЕНКО

АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ РЕПЕРОВ ВЫСОТНОЙ ОСНОВЫ

Для качественного измерения осадки сооружений необходимо иметь надежную опорную сеть, пункты которой сохраняли бы устойчивое высотное положение на протяжении всего периода наблюдений. Однако по различным причинам [7] абсолютную неподвижность реперов обеспечить чрезвычайно трудно. При этом вертикальные смещения реперов, заложенных не на скальном основании, обнаруживаются почти всегда. Известны также случаи [8], когда даже глубинные реперы, установленные в скальном основании на расстоянии 2 *км* от крупного гидротехнического сооружения, смещались по высоте на 2 *мм* и более.

Поскольку надежное измерение осадки сооружений возможно только при наличии устойчивой высотной основы, то возникает необходимость анализировать стабильность реперов в ходе наблюдений за осадкой сооружений.

Кафедра геодезии Волгоградского института инженеров городского хозяйства на протяжении многих лет занималась исследованием устойчивости реперов опорной сети при измерениях осадки сооружений. Выполненная работа позволила автору предложить метод анализа стабильности реперов высотной основы.

Рассмотрим сущность предлагаемого метода.

Пусть в результате нивелирования сети получены превышения h_{ik} по ходам между узловыми точками с номерами i и k и их веса p_{ik} $(i, k=1, 2, \dots, n)$.

Для записи на общей основе полагаем $p_{ik}=0$ и $h_{ik}=0$, если между точками i и k ход не прокладывался.

Положим: H_i — значения высот узловых точек, соответствующие уравниванию результатов измерений по способу наименьших квадратов; $\bar{H}_i$ — приближенные значения высот узловых точек (мы пока считаем, что сеть «свободная» — твердых точек нет), а Δ_i — поправки в эти отметки $(i=1, 2, \dots, n)$.

Тогда уравненные отметки точек будут

$$H_i=\bar{H}_i+\Delta_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Используя приближенные отметки узловых точек, получаем условные невязки $\bar{v}_{ik}$ по ходам

$$\bar{H}_i+h_{ik}-\bar{H}_k=\bar{v}_{ik}. \tag{2}$$

Если $\Delta_i, \Delta_k, \dots, \Delta_n$ удовлетворяют условию наивыгоднейшего решения, то величины

$$\bar{H}_i+\Delta_i+h_{ik}-\bar{H}_k-\Delta_k=v_{ik} \tag{3}$$

должны отвечать условию:

$$G=\sum_{i,k=1}^{n} p_{ik} v_{ik}^2=\min. \tag{4}$$

Введем дополнительные обозначения: $\sum_{k=1}^{n} p_{uk}=P_u$ $(u=1, 2, \ldots, n)$ —
узлов точки с номером u, равный сумме весов ходов, заканчивающхся (начинающихся) в этой точке; $\sum_{k=1}^{n} p_{uk}\overline{v}_{uk}=-\sum_{k=1}^{n} p_{ku}\overline{v}_{ku}=-V_u$ —
язка узловой точки с номером u. Напишем уравнение узловой точ-
[5]

$$P_u\Delta_u-\sum_{k=1}^{n} p_{uk}\Delta_k=V_u. \tag{5}$$

Пусть A — матрица коэффициентов системы линейных уравнений
. Легко видеть, что $\det A=0$. Это объясняется тем, что для свобод-
сети существует бесчисленное число решений, удовлетворяющих
овию (4), так как измеренные величины $h_{ik}(i, k=1, 2, \ldots, n)$ зави-
не от самих значений $H_j(j=1, 2, \ldots, n)$, а от их разностей. Отсюда,
и решением является система $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, то условию задачи
ечает и все множество решений $\Delta_1+t, \Delta_2+t, \ldots, \Delta_n+t$, где t — про-
ольное число.

Для получения некоторого решения из этого множества следует
омые поправки Δ_i подчинить дополнительному условию

$$\Delta_1 p_1+\Delta_2 p_2+\ldots+\Delta_n p_n=0, \tag{6}$$

p_i — произвольные числа, сумма которых отличается от нуля,

$$p_1+p_2+\ldots+p_n\neq 0. \tag{7}$$

Это дополнительное уравнение надо присоединить к исходной систе-
линейных уравнений и решить совместно.

В общем виде результат присоединения условия (6) к исходной
теме уравнений представится нормальной системой

$$\overline{A}\cdot\Delta=V, \tag{8}$$

$\overline{A}$ — преобразованная матрица коэффициентов нормальных урав-
ий.

Требование (7) обеспечивает условие $\det\overline{A}\neq 0$, то есть преобразо-
ная система имеет единственное решение.

Изложенное решение было предложено в [1] применительно к урав-
ешиванию направлений, измеренных несколькими приемами на
нции. В [2] подчеркнута общность задач уравнивания направлений
станции с уравниванием превышений в произвольной высотной сети.

В первой работе подбор коэффициентов p_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ реко-
довалось производить таким образом, чтобы преобразованная си-
ма имела наиболее простой вид, в частности превратилась бы в си-
му с отделяющимися неизвестными (в каждом уравнении одно не-
естное). Мы обращаем внимание на возможность использования
олнительного уравнения (6) для анализа устойчивости реперов по
ультатам многократного нивелирования. В [3] рекомендуется сеть,
держащую m твердых реперов, уравнять сначала как свободную, а
ем вычислить отметки всех точек m вариантами, принимая в i-м ва-
анте $(i=1, 2, \ldots, m)$ за исходную отметку i-го репера. В результате
каждого репера будет получено m значений отметок, из которых
адлежит взять среднее.

Смысл данного предложения сводится к тому, что если нет оснований судить об устойчивости реперов, каждый из которых с одинаковой вероятностью может изменить свою высоту, то целесообразно принять неизменной среднюю высоту этих реперов.

Идею неизменности средней высоты реперов мы находим и в статье [6]. Однако тот же результат (неизменность средней высоты для m реперов) можно получить, используя изложенное решение с дополнительным условием (6), в котором нужно лишь положить

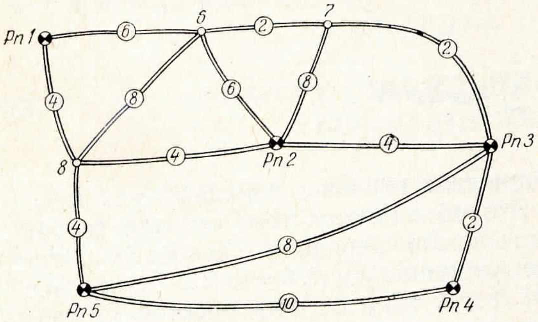

Схема нивелирных ходов.

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_m = 1,$$

$$p_{(m+1)} = p_{(m+2)} = \cdots = p_n = 0, \quad (9)$$

где $1, 2, \ldots, m$ — номера реперов; $(m+1), (m+2), \ldots, n$ — номера узловых точек. Отметим, что все репера следует включить в уравновешивание как узловые точки.

Реализация предложенного метода к анализу устойчивости реперов по результатам нивелирования, выполненного N циклами, сводится к следующему.

Первый цикл уравнивается при произвольном дополнительном уравнении (6). Обычно полагают $p_1 = \mathrm{I}$ и $p_2 = p_3 = \cdots p_m = 0$, то есть вычисляют отметки от первого репера: H_1', H_2', ..., H_m'. Каждый последующий ν-й цикл уравнивается под условием (9). Получают отметки: H_1^ν, H_2^ν, ..., H_m^ν $(\nu = 2, 3, \ldots, N)$.

По колебаниям отметок, найденным из N циклов, и следует судить об устойчивости репера с номером j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

При наличии большого числа циклов решение нормальной системы следует выполнять обращением матрицы $\bar{A}$, тогда

$$\Delta = \bar{A}^{-1} \cdot V, \tag{10}$$

где $\bar{A}^{-1}$ — обращенная матрица, то есть $\bar{A}^{-1} \cdot \bar{A} = E$*.

П р и м е р. Для сети нивелирных ходов (рис. 1) выполнено семь циклов нивелирования с точностью 2-го класса.

Точки с номерами *1*, *2*, *3*, *4* и **5** — реперы, а *6*, *7* и *8* — узловые точки.

Система линейных уравнений (5) для II цикла наблюдений имеет вид

$$\left.\begin{array}{l}
5\Delta_1 - 2\Delta_6 - 3\Delta_8 = 1{,}1;\\
9{,}5\Delta_2 - 3\Delta_3 - 2\Delta_6 - 1{,}5\Delta_7 - 3\Delta_8 = 6{,}6;\\
11{,}5\Delta_3 - 3\Delta_2 - 6\Delta_4 - 1{,}5\Delta_5 - \Delta_7 = 7{,}7;\\
7\Delta_4 - 6\Delta_3 - 1{,}2\Delta_5 = -5{,}9;\\
5{,}7\Delta_5 - 1{,}2\Delta_4 - 1{,}5\Delta_3 - 3\Delta_8 = 9{,}1;\\
-2\Delta_1 - 2\Delta_2 + 11{,}5\Delta_6 - 6\Delta_7 - 1{,}5\Delta_8 = -0{,}8;\\
-1{,}5\Delta_2 - \Delta_3 - 6\Delta_6 + 8{,}5\Delta_7 = 0{,}8;\\
-3\Delta_1 - 3\Delta_2 - 3\Delta_5 - 1{,}5\Delta_6 + 10{,}5\Delta_8 = -18{,}6.
\end{array}\right\} \tag{11}$$

---

*E — единичная матрица.

Составим матрицу A коэффициентов линейных уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 9{,}5 & -3 & 0 & 0 & -2 & -1{,}5 & -3 \\ 0 & -3 & 11{,}5 & -6 & -1{,}5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7{,}2 & -1{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & -1{,}2 & 5{,}7 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 11{,}5 & -6 & -1{,}5 \\ 0 & -1{,}5 & -1 & 0 & 0 & -6 & 8{,}5 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & -3 & -1{,}5 & 0 & 10{,}5 \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание (9), вводим дополнительное условие

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 = 0. \tag{12}$$

Стремясь максимально упростить преобразованную систему урав-
ий, назначаем дополнительные множители $K_1 = -5$; $K_2 = 3$; $K_3 = 3$;
=6; $K_5 = 1{,}5$; $K_6 = 2$; $K_7 = 1$; $K_8 = 3$.

Умножаем дополнительное условие (12) на каждый из множителей
$K_2, \ldots, K_8$. Полученные результаты последовательно складываем
равнениями системы (11).

Матрица $\bar{A}$ коэффициентов преобразованной системы уравнений
ет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 12{,}5 & 0 & 3 & 3 & -2 & -1{,}5 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & -5 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 14{,}5 & -3 & 1{,}5 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 13{,}2 & 4{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 0 & 0{,}3 & 7{,}2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 11{,}5 & -6 & -1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 & 0 & 1 & 1 & -6 & 8{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & -1{,}5 & 0 & 10{,}5 \end{pmatrix}.$$

Обращая матрицу $\bar{A}$, находим

$$\begin{matrix} 0{,}1193 & +0{,}3454 & +0{,}0552 & +0{,}0320 & +0{,}0826 & +0{,}1885 & +0{,}1606 & +0{,}1833 \\ 0{,}1052 & -0{,}0067 & -0{,}0138 & -0{,}0451 & -0{,}0352 & +0{,}0462 & +0{,}0495 & +0{,}0246 \\ 0{,}0384 & -0{,}0954 & +0{,}0552 & +0{,}0099 & -0{,}0498 & -0{,}0494 & -0{,}0351 & -0{,}0595 \\ 0{,}0934 & -0{,}1423 & -0{,}0138 & +0{,}0872 & -0{,}0746 & -0{,}1011 & -0{,}0895 & -0{,}1031 \\ 0{,}0238 & -0{,}0319 & -0{,}0138 & -0{,}0149 & +0{,}1460 & -0{,}0153 & -0{,}0166 & +0{,}0236 \\ 0{,}0572 & +0{,}0735 & -0{,}0138 & -0{,}0419 & -0{,}0157 & +0{,}1931 & +0{,}1448 & +0{,}0604 \\ 0{,}0463 & +0{,}0314 & -0{,}0138 & -0{,}0445 & -0{,}0313 & -0{,}1305 & +0{,}2163 & +0{,}0319 \\ 0{,}0458 & +0{,}0784 & -0{,}0138 & -0{,}0337 & +0{,}0033 & +0{,}0706 & +0{,}0563 & +0{,}1503 \end{matrix}\right)$$

Значения векторов (матриц-столбцов) свободных членов для II,
..., VII циклов наблюдений приведены ниже:

	II*	III	IV	V	VI	VII
V_1	6,6	2,9	20,3	35,6	56,0	57,0
V_2	1,1	−7,0	2,5	19,9	17,7	18,1
V_3	7,7	−5,7	−12,0	−4,7	−11,1	−22,0
V_4	−5,9	5,4	6,4	5,5	6,1	8,3
V_5	9,1	1,6	12,1	14,6	17,0	22,8
V_6	−0,8	−5,9	−11,0	−26,8	−35,4	−30,8
V_7	0,8	−7,2	4,0	−2,6	−4,5	−2,8
V_8	−18,6	15,9	−22,3	−41,6	−45,6	−50,6

* Здесь и в аналогичных случаях римские цифры обозначают циклы наблюдений.

Приведем поправки Δi ($i=1, 2, \ldots, 5$) к отметкам реперов по циклам, *мм*:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Среднее значение поправок
Δ_1	0	+0,07	−0,11	+0,70	+0,52	+2,06	+2,19	+0,78
Δ_2	0	−1,28	−1,44	−1,69	−0,85	−2,01	−1,54	−1,26
Δ_3	0	+0,67	−0,19	−0,49	−0,31	−0,61	−1,55	−0,36
Δ_4	0	−0,14	+0,76	+0,62	+0,53	+0,37	+0,01	+0,31
Δ_5	0	+0,68	+0,97	+0,85	+0,10	+0,18	+0,90	+0,53

Случайные ошибки δi, представляющие собой совокупное влияние ошибок нивелирования и изменения высот реперов, таковы:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Сумма
δ_1	−0,73	−0,71	−0,89	−0,08	−0,26	+1,28	+1,41	−0,03
δ_2	+1,26	−0,02	−0,18	−0,43	+0,41	−0,75	−0,28	+0,01
δ_3	+0,36	+1,03	+0,17	−0,13	+0,05	−0,25	−1,19	+0,04
δ_4	−0,31	−0,45	+0,45	+0,31	+0,22	+0,06	−0,30	−0,02
δ_5	−0,53	+0,15	+0,44	+0,32	−0,43	−0,35	−0,37	−0,03
Сумма	0,00	0,00	−0,01	−0,01	−0,01	−0,01	−0,01	−0,03

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

Репер 1 претерпел небольшое выпучивание после V цикла, что подтверждено результатами VI и VII циклов наблюдений.

Репер 2 несколько опустился после I цикла (возможна также ошибка в определении его отметки в первой нивелировке); в последующих циклах репер 2 оставался устойчивым.

Высоты остальных реперов в пределах точности нивелирования остаются неизменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганьшин В. Н. Математическая обработка наблюдений, сходных по форме с наблюдением направлений. — Уч. зап. Кишиневского ун-та, т. 5. Кишинев, 1952.
2. Ганьшин В. Н. Математическая обработка наблюдений, сходных по форме с наблюдением направлений. — Сб. ГУГК, № 8, 1954.
3. Буденков Н. А., Стороженко А. Ф. К вопросу об устойчивости глубинных реперов. — «Геодезия и картография», 1967, № 3.
4. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматиздат, 1962.
5. Попов В. В. Уравновешивание полигонов. М., Геодезиздат, 1956.
6. Черников В. Ф. Создание высотной опорной сети для наблюдений за осадками промышленных сооружений. — Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1963, № 5.
7. Успенский М. С. Исследования по закреплению геодезических пунктов на территории СССР. М., «Недра», 1966.
8. Marčas P. Skumanie stability pevnych vyskovych bodov pri nivelačnyc meraniach zvislych posunov stavieb. Bratislava, 1961.

Работа поступила в редколлегию 23 н ября 1971 года. Рекомендована ректор том Волгоградского института инженер городского хозяйства.