РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 17

УДК 528.14:528.33

В. Д. ШИПУЛИН

ОБ УРАВНИВАНИИ НАРАЩИВАЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ СПОСОБОМ НЕОБХОДИМЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ

Последовательное наращивание геодезических сетей, то есть присоединение новых (наблюденных) геодезических сетей (или элементов) к ранее построенным и уравненным (исходным) геодезическим сетям, вызывает необходимость в уравнивании таких объединенных сетей.

Решая эту задачу, применим принцип наименьших квадратов, обобщенных на зависимые величины. Для последовательного уравнивания геодезических сетей способом необходимых неизвестных используем зависимости, полученные в [2]. Выражение (20) из [2] вектора поправок в необходимые неизвестные

$$-\underset{t,1}{x_{ld}} = (\underset{t,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,t}{A_l} + \underset{t,m}{A_d^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{m,m}{Q_d^{-1}} \cdot \underset{m,t}{A_d})^{-1} \cdot (\underset{t,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,1}{\lambda_l} + \underset{t,m}{A_d^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{m,m}{Q_d^{-1}} \cdot \underset{m,1}{\lambda_d})$$

следует преобразовать к виду, удобному для решения поставленной задачи.

Прежде всего обратим внимание на то, что любому случаю последовательного уравнивания геодезических построений будет удовлетворять матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок, состоящая из следующих блоков:

$$\underset{k,t}{A_l} = \left\| \begin{array}{c|c|c} \underset{k,u}{A_l} & \underset{k,v}{A_{l'}} & \underset{k,w}{0} \end{array} \right\| \qquad (s=v+w), \tag{1}$$

$$\underset{m,t}{A_d} = \left\| \begin{array}{c|c} \underset{s,u}{0} & \underset{s,s}{E} \\ \hline \underset{c,u}{0} & \underset{c,s}{A_d} \end{array} \right\| \qquad (m=s+c), \tag{2}$$

где u — число необходимых неизвестных наблюденной сети; v — число исходных данных для наблюденной сети в исходной сети; w — число буферных элементов исходной сети. Поэтому матрица весовых коэффициентов необходимых неизвестных и измерений исходной сети может быть получена преобразованием

$$\underset{m,m}{Q_d} = \left\| \begin{array}{c} \underset{s,s}{E} \\ \hline \underset{c,s}{A_d} \end{array} \right\| \cdot \underset{s,s}{Q_d} \cdot \left\| \begin{array}{c|c} \underset{s,s}{E} & \underset{s,c}{A_d^{\mathrm{T}}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \underset{s,s}{Q_d} & \underset{s,s}{Q_d} \cdot \underset{s,c}{A_d^{\mathrm{T}}} \\ \hline \underset{c,s}{A_d} \cdot \underset{s,s}{Q_d} & \underset{c,s}{A_d} \cdot \underset{s,s}{Q_d} \cdot \underset{s,c}{A_d^{\mathrm{T}}} \end{array} \right\|. \tag{3}$$

Для решения выражения (20) из [2] необходимо образовать $\underset{m,m}{Q_d^{-1}}$. Обращая блочную матрицу (3) по формуле Фробениуса [1, стр. 60], определим прежде общую для составляющих блоков матрицу

$$\underset{s,s}{H} = \underset{c,s}{A_d} \cdot \underset{s,s}{Q_d} \cdot \underset{s,c}{A_d^{\mathrm{T}}} - \underset{c,s}{A_d} \cdot \underset{s,s}{Q_d} \cdot \underset{s,s}{Q_d^{-1}} \cdot \underset{s,s}{Q_d} \cdot \underset{s,c}{A_d^{\mathrm{T}}} = \underset{c,c}{0}. \tag{4}$$

На этом основании (3) приводится к виду:

$$\underset{m,m}{Q_d^{-1}} = \left\| \begin{array}{c:c} \underset{s,s}{Q_d^{-1}} & \underset{s,c}{0} \\ \hdashline \underset{c,s}{0} & \underset{c,c}{0} \end{array} \right\|. \tag{5}$$

Если в качестве необходимых неизвестных X_d всегда вводить косвенные измерения, найденные из предыдущего уравнивания исходной сети, то в каждом случае уравнивания будем иметь

$$\underset{m,1}{\lambda_d} = \underset{m,1}{0}. \tag{6}$$

Для дальнейших преобразований целесообразно разбить матрицу $\underset{s,s}{Q_d^{-1}}$ на блоки следующим образом:

$$\underset{s,s}{Q_d^{-1}} = \left\| \begin{array}{c:c} \underset{v,v}{Q_d^{-1}} & \underset{v,w}{Q_d^{-1}} \\ \hdashline \underset{w,v}{Q_d^{-1}} & \underset{w,w}{Q_d^{-1}} \end{array} \right\|. \tag{7}$$

Теперь, учитывая выражения (1), (2), (5), (6), (7), преобразуем (20) из [2] к виду

$$-\underset{t,1}{x_{ld}} = \left\| \begin{array}{c} -\underset{u,1}{x_l} \\ \hdashline -\underset{v,1}{x_{d'}} \\ \hdashline -\underset{w,1}{x_{d''}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c|c} \underset{u,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_l} & \underset{u,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,v}{A_{l'}} & \underset{u,w}{0} \\ \hline \underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_l} & \underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,v}{A_{l'}} + \underset{v,v}{Q_{d'}^{-1}} & \underset{v,w}{Q_d^{-1}} \\ \hdashline \underset{w,u}{0} & \underset{w,v}{Q_d^{-1}} & \underset{w,w}{Q_{d''}^{-1}} \end{array} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{array}{c} \underset{u,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,1}{\lambda_l} \\ \hdashline \underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,1}{\lambda_l} \\ \hdashline \underset{w,1}{0} \end{array} \right\|. \tag{8}$$

Обращая в (8) блочную (относительно сплошных линий) матрицу коэффициентов нормальных уравнений, получаем

$$\left\| \begin{array}{c} -\underset{u,1}{x_l} \\ \hdashline -\underset{v,1}{x_{d'}} \\ \hdashline -\underset{w,1}{x_{d''}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c:c:c} \underset{u,u}{Q_{x_l}} & \underset{u,v}{Q_x} & \underset{u,w}{Q_x} \\ \hdashline \underset{v,u}{Q_x} & \underset{v,v}{Q_{x_{d'}}} & \underset{v,v}{Q_{x_d}} \\ \hdashline \underset{w,u}{Q_x} & \underset{w,v}{Q_{x_d}} & \underset{w,w}{Q_{x_{d''}}} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \underset{u,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,1}{\lambda_l} \\ \hdashline \underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,1}{\lambda_l} \\ \hdashline \underset{w,1}{0} \end{array} \right\|, \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \underset{u,u}{Q_{x_l}} &= (\underset{u,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_l})^{-1} \cdot \{\underset{u,u}{E} + \underset{u,k}{A_l} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \underset{k,v}{A_{l'}} \cdot \underset{v,v}{Q_{xd''}} \cdot \underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \underset{k,u}{A_l} \cdot (\underset{u,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_l})^{-1}\}; \\ \underset{v,u}{Q_x} &= \underset{u,v}{(Q_x)^{\mathrm{T}}} = -\underset{v,v}{Q_{x_{d'}}} \cdot \underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k.u}{A_l} \cdot (\underset{u\text{-}k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \underset{k,u}{A_l})^{-1}; \\ \underset{w,u}{Q_x} &= \underset{u,w}{(Q_x)^{\mathrm{T}}} = -\underset{w,v}{Q_{x_d}} \cdot \underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_l} \cdot (\underset{u,k}{A_l^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_l})^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left\| \begin{array}{c:c} \underset{v,v}{Q_{x_{d'}}} & \underset{w,w}{Q_{x_d}} \\ \hdashline \underset{w,v}{Q_{x_d}} & \underset{w,w}{Q_{x_{d''}}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c:c} \underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,v}{A_{l'}} + \underset{v,v}{Q_d^{-1}} & \underset{v,w}{Q_d^{-1}} \\ \hdashline \underset{w,v}{Q_d^{-1}} & \underset{w,w}{Q_{d''}^{-1}} \end{array} \right\|^{-1}. \tag{11}$$

$$\underset{v,v}{Q_{x_{d'}}} = \{\underset{v,k}{A_{l'}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,v}{A_{l'}} + \underset{v,v}{Q_{d'}^{-1}} - \underset{v,w}{Q_d^{-1}} \cdot (\underset{w,w}{Q_{d''}^{-1}} \cdot \underset{w,v}{Q_d^{-1}}\}^{-1}, \tag{12}$$

$$\underset{w,v}{Q_{x_d}} = \underset{v,w}{(Q_{x_d})^{\mathrm{T}}} = -\underset{w,w}{(Q_{d''}^{-1})^{-1}} \cdot \underset{w,v}{Q_d^{-1}} \cdot \underset{v,v}{Q_{xd'}}, \tag{13}$$

$$\underset{w,w}{Q_{x_{d''}}} = (\underset{w,w}{Q_{d''}^{-1}})^{-1} - (\underset{w,w}{Q_{d''}^{-1}})^{-1} \cdot \underset{w,v}{Q_{d}^{-1}} \cdot \underset{v,v}{Q_{xd'}} \cdot \underset{v,w}{Q_{d}^{-1}} \cdot (\underset{w,w}{Q_{d''}^{-1}})^{-1}. \qquad (14)$$

После перемножения блоков в (9) наконец можно выделить: вектор поправок в необходимые неизвестные наблюденной сети

$$-\underset{u,1}{x_l} = (\underset{u,k}{A_l^{\text{т}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_l})^{-1} \cdot \underset{u,k}{A_l^{\text{т}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot (\underset{k,k}{E} - \underset{k,v}{A_{l'}} \cdot \underset{v,v}{Q_{x_{d'}}} \cdot \underset{v,k}{A_{l'}^{\text{т}}} \cdot \underset{k,k}{\bar{Q}_l}) \cdot \underset{k,1}{\lambda_l}, \qquad (15)$$

вектор поправок в исходные данные

$$-\underset{v,1}{x_{d'}} = -\underset{v,v}{Q_{x_{d'}}} \cdot \underset{v,k}{A_{l'}^{\text{т}}} \cdot \underset{k,k}{\bar{Q}_l} \cdot \underset{k,1}{\lambda_l}, \qquad (16)$$

вектор поправок в буферные элементы

$$-\underset{w,1}{x_{d''}} = -\underset{w,v}{Q_{x_d}} \cdot \underset{v,k}{A_{l'}^{\text{т}}} \cdot \underset{k,k}{\bar{Q}_l} \cdot \underset{k,1}{\lambda_l}, \qquad (17)$$

где

$$\underset{k,k}{\bar{Q}_i} = \underset{k,k}{Q_l^{-1}} - \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_l} \cdot (\underset{u,k}{A_l^{\text{т}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}} \cdot \underset{k,u}{A_i})^{-1} \cdot \underset{u,k}{A_l^{\text{т}}} \cdot \underset{k,k}{Q_l^{-1}}. \qquad (18)$$

Анализируя полученные выражения (15), (16), (17), приходим к таким выводам.

При последовательном уравнивании геодезических сетей не используются параметрические уравнения поправок в непосредственные измерения исходной сети, если в качестве необходимых неизвестных X_d будут введены косвенные измерения, найденные из предыдущего уравнивания исходной сети.

Для последовательного уравнивания необходимо иметь: а) диагональную матрицу $\underset{k,k}{Q_l}$ весовых коэффициентов для результатов измерений наблюденной сети; б) корреляционную матрицу $\underset{ss}{Q_d}$ весовых коэффициентов необходимых неизвестных в исходной сети; в) матрицу коэффициентов параметрических уравнений поправок наблюденной сети $\underset{k,u+v}{A_l} - \| \underset{k,u}{A_l} \vdots \underset{k,v}{A_{l'}} \|$; г) вектор свободных членов наблюденной сети $\underset{k,1}{\lambda_l}$.

Объем вычислительных работ в значительной мере зависит от размеров исходной сети, точнее от числа косвенных измерений исходной сети. Чем последних больше, тем больше размер матрицы (11), больше объем вычислений, связанный с ее обращением. Остальные операции выполняются с матрицами обычных (для уравнивания лишь наблюденной сети) размеров.

Поправки в буферные величины зависят от соотношения весов и степени корреляции буферных и исходных данных, представляемой матрицей $\underset{w,v}{Q_{xd}}$. По мере удаления буферных элементов от исходных корреляция между ними убывает и поправки поэтому уменьшаются. Так что поправки практически ощутимой величины получат величины буферной зоны, прилегающей к исходным данным.

На размер поправок в необходимые неизвестные наблюденной сети и поправок в исходные данные оказывает влияние корреляционный блок $\underset{v,v}{Q_{xd'}}$ весовых коэффициентов исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
2. Шипулин В. Д. Уравнивание геодезических сетей с учетом ошибок исходных данных. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 12, Изд-во Львовского ун-та, 1970.

Работа поступила в редколлегию 20 декабря 1971 года. Рекомендована кафедрой геодезии Харьковского института инженеров коммунального строительства.