РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 17

УДК 528.721.2

С. Г. МОГИЛЬНЫЙ Л. И. АХОНИНА

ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ВЗАИМНОГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ АЭРОФОТОСНИМКОВ НА ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТ ТОЧЕК

Точность взаимного ориентирования на универсальных стереообрабатывающих приборах является одним из главных факторов, которые определяют точность пространственных координат точек стереомодели.

Чтобы проанализировать точность определения отметок стереомодели, построенной на универсальном стереоприборе, например стереометрографе, достаточно обратиться к случаю съемки, когда снимки и базис фотографирования горизонтальны. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать получаемые на приборе элементы взаимного ориентирования как ошибки их истинных нулевых значений. При этих предположениях ошибка высоты фотографирования произвольной точки модели выражается известной формулой

$$\delta H = \frac{\bar{B} f}{p^2}\left[\frac{x^2}{f}(\alpha' - \alpha) + \frac{xy}{f}\omega' - x\frac{2p}{f}\alpha' + y\left(\varkappa - \varkappa' - \frac{p\omega'}{f}\right) + \frac{p^2}{f}\alpha'\right], \quad (1)$$

где $\bar{B}$ — базис фотографирования, *м*; f — фокусное расстояние аэрокамеры, *мм*; x, y — координаты точки на левом снимке, *мм*; p — параллакс точки, *мм*; α, α', ω', $\varkappa$, $\varkappa'$ — ошибки элементов взаимного ориентирования в радианной мере.

На универсальных приборах отметки точек модели определяются по разностям продольных параллаксов опознаков и определяемой точки, поэтому нельзя использовать формулу (1) для вычисления ошибки отметки произвольной точки модели, ориентированной по опознакам.

В литературе [4] указывается, что геодезическое ориентирование делает ошибку отметки точки существенно меньше по сравнению с δH, а именно исключаются члены формулы (1), линейно зависящие от x и y.

Однако такого анализа недостаточно, так как не учитывается частичная компенсация первых двух слагаемых формулы (1).

Мы хотим дополнить анализ влияния ошибок взаимного ориентирования, выполненный в работах [2, 3, 5, 6], осветив те стороны вопроса, которые в них не рассматривались, а также дать сравнительно простую формулу для оценки влияния взаимного ориентирования на ошибку отметки точки в углу стереопары.

Вводя в формулу (1) соответствующие обозначения, записываем

$$\delta H = Ax^2 + Bxy + Cx + Dy + E. \quad (2)$$

При обработке на универсальном приборе величина H, высота фотографирования, не измеряется, а по счетчику отметок точек берется отсчет, который зависит от построенного в приборе значения H. Показание счетчика Z прибора можно интерпретировать следующим образом:

$$Z_i = -H_i + \xi x_i + \eta y_i + c_0, \quad (3)$$

где H_i — высота фотографирования левого снимка над i-й точкой, полученная в приборе; x_i, y_i — координаты точки i на левом снимке; c_0 — место нуля счетчика z прибора; ξ, η — постоянные, зависящие от наклона стереомодели, определяются при геодезическом ориентировании.

Если отвлечься от всех остальных ошибок, кроме ошибок взаимного ориентирования, то при наведении на опознак на счетчике будет получаться отметка, отличающаяся от ее геодезического значения на величину δZ_i, определяемую согласно (2) и (3) выражением

$$\delta Z_i = A_i x_i^2 + B_i x_i y_i + C_i x_i + D_i y_i + E_i - \xi x_i - \eta y_i - c_0. \tag{4}$$

Значения величин ξ, η и c_0 зависят от способа геодезического ориентирования, то есть количества используемых опознаков и способа распределения между ними уклонений δZ_i. После горизонтирования модели ошибка отметки произвольной точки в указанных выше условиях обусловливается найденными значениями ξ, η и c_0 и определяются формулой (4).

Одним из возможных способов определения коэффициентов является определение их при условии, чтобы на опознаках сумма квадратов уклонений отметок была минимальной, то есть

$$[\delta Z \delta Z] = \min, \tag{5}$$

что практически осуществимо оптикомеханическим путем [3].

Рассмотрим, каковы остаточные искажения отметок из-за ошибок взаимного ориентирования при таком горизонтировании модели.

Если на стереопаре n опознаков, то для определения ξ, η и c_0 имеем n уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \delta Z_1 = -\xi x_1 - \eta y_1 - c_0 + \delta l_1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta Z_n = -\xi x_n - \eta y_n - c_0 + \delta l_n, \end{array}\right\} \tag{6}$$

где δl_n — величина, определяемая формулой (2).

Системе (6) соответствует система нормальных уравнений

$$\begin{array}{c} [xx]\xi + [xy]\eta + [x]c_0 - [x\delta l] = 0; \\ [xy]\xi + [yy]\eta + [y]c_0 - [y\delta l] = 0; \\ [x]\xi + [y]\eta + nc_0 - [\delta l] = 0, \end{array} \tag{7}$$

из решения которой находят ξ, η и c_0 и подставляют в (4).

Формула (4) будет наиболее простой для случая съемки горизонтальной плоской местности. На этом частном случае съемки можно выявить некоторые общие закономерности. Поэтому будем считать, что местность представляет собой горизонтальную плоскость, то есть коэффициенты A, $B, \ldots, E$ постоянны для всех точек модели. В этом случае понятно, что при любом числе опознаков, не меньшем трех, и любом их расположении при геодезическом ориентировании модели в формуле (4) полностью исключаются третье и четвертое слагаемые. Поэтому для плоской местности, не нарушая общности дальнейших выводов, формулы (2) и (4) можно рассматривать в следующем виде:

$$\delta H = A x_i^2 + B x_i y_i, \tag{8}$$

$$\delta Z = A x^2 + B x y - \xi' x - \eta' y - c_0', \tag{9}$$

где ξ', η' и c_0' — доля значений коэффициентов ξ, η, c_0, обусловленная влиянием только первых двух слагаемых (2).

Если четыре опознака расположены по стандартной схеме, то решение системы (7) дает такие значения неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= Ab; \\ \eta' &= \frac{1}{2} Bb; \\ c_0'' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где b — базис фотографирования в масштабе снимка.

Ошибка отметки любой точки модели определяется формулой

$$\delta Z = Ax^2 + Bxy - Abx - \frac{1}{2} Bby. \qquad (11)$$

Исследуя уравнение (11), найдем, что наибольшую среднюю квадратическую величину ошибки имеют отметки точек в углах стереопары и, что, согласно (1) и (11), она вычисляется по формуле

$$m_z = \frac{Hy_{\max} m_q}{2f} \sqrt{Q_{\omega\omega}}, \qquad (12)$$

где H — высота фотографирования; $y_{\max}$ — наибольшее значение ординат точек в пределах стереопары; m_q — средняя квадратическая ошибка измерения вертикальных параллаксов; $Q_{\omega\omega}$ — величина обратная весу угла ω'.

При выводе формулы (12) учитывается то обстоятельство, что ошибки $(\alpha' - \alpha)$ и ω' статистически независимы и что ω' практически всегда имеет меньший вес. Как показывают подробные расчеты, это утверждение справедливо не только для плоской местности, но и для местности с рельефом.

Среднее квадратическое значение ошибки δZ в пределах стереопары находим, исходя из (11), по формуле

$$m^2_{Z_{\text{ср}}} = \frac{1}{2\, by_{\max}} \int\limits_{-y_{\max}}^{y_{\max}} \int\limits_{0}^{b} \left(Ax^2 + Bxy - Abx - \frac{1}{2} Bby \right)^2 dx\, dy. \qquad (13)$$

Откуда после преобразований

$$m_{Z_{\text{ср}}} = b \sqrt{\frac{b^2}{30} A^2 + \frac{y^2_{\max}}{36} B^2}. \qquad (14)$$

Подставляя вместо A^2 и B^2 их средние значения, получаем

$$m_{Z_{\text{ср}}} = \frac{H m_q}{f} \sqrt{\frac{b^2}{30} Q_{\Delta\alpha\Delta\alpha} + \frac{y^2_{\max}}{36} Q_{\omega\omega}}, \qquad (15)$$

где $Q_{\Delta\alpha\Delta\alpha}$ — величина, обратная весу угла $(\alpha' - \alpha)$.

Сравнивая формулу (12) и (15), видим, что наибольшая ошибка отметки превосходит среднюю в пределах стереопары более, чем в два раза. Поэтому при характеристике влияния взаимного ориентирования на точность отметок точек модели следует иметь в виду именно наибольшую ошибку, вычисляемую для плоской местности по формуле (12), так как оценка качества геодезического ориентирования на приборе производится по опознакам, расположенным в углах стереопары, где именно величина δZ (11) чаще всего имеет наибольшее значение, и расхождение отметок на стыке двух стереопар также обусловлено чаще всего наибольшими в пределах стереопары значениями ошибок δZ.

Если опознаки расположены не по стандартной схеме, то формула (11) будет более сложной, не удобной для предрасчетов. Однако для практики, имея формулу (12), достаточно указать такие пределы отклонения опознаков от стандартного расположения, при которых увеличение ошибки отметки не превысит заданной величины. Для решения этого вопроса была использована следующая методика. Опознакам задавалась область их возможного положения в виде квадратов со стороной d и центрами в точках стандартного их расположения. В пределах заданных квадратов случайным образом выбирались координаты опознаков и при помощи формул (8), (7) и (9) вычислялась m_Z' средняя квадратическая величина наибольшей в пределах стереопары ошибки. Величина m_Z' сравнивалась с m_Z, вычисляемым по (12), для чего определялось отношение

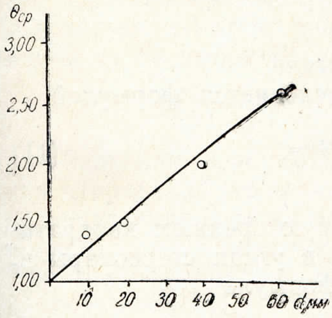

Рис. 1. Влияние положения опознаков на точность отметок точек модели.

$$\Theta = \frac{m_Z'}{m_Z}. \tag{16}$$

Вычисления выполнялись на ЭВМ «Минск-22» по программе, в которой использовался программный датчик случайных чисел, равномерно распределенных в интервале 0; 1.

На рис. 1 точками обозначены средние значения величин Θ, полученные каждая из 65 вариантов нестандартного расположения опознаков для указанной по горизонтальной оси величины их возможного смещения. Используя график на рис. 1, можно оценить степень влияния расположения опознаков на точность отметок точек.

Полученные выше результаты характеризуют случай, когда на стереопаре имеется четыре опознака, расположенные по стандартной схеме или близкой к ней. Уместен вопрос, на сколько уменьшат ошибку отметок дополнительные опознаки сверх четырех. Для плоской местности легко рассмотреть предельный случай, когда опознаков на стереопаре бесконечно много и расположены они равномерно. Если в таком предельном случае определить значение коэффициентов ξ', η' и c_0', исходя из условия (5), то очевидно, что они должны соответствовать минимуму

$$F = \frac{1}{2by_{\max}} \int\limits_{-y_{\max}}^{y_{\max}} \int\limits_{0}^{b} (Ax^2 + Bxy - \varepsilon' x - \eta' y - c_0')^2 \, dx \, dy = \min. \tag{17}$$

Опуская громоздкие вычисления, записываем выражения искомых неизвестных

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= Ab; \\ \eta' &= \frac{1}{2} Bb; \\ c_0' &= -\frac{1}{6} Ab^2, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и уравнение (9) в этом случае будет иметь вид

$$\delta Z = Ax^2 + Bxy - Abx - \frac{1}{2} Bby + \frac{1}{6} Ab^2. \tag{19}$$

Таким образом, видно, что неограниченное увеличение числа опознаков на стереопаре не изменяет значения коэффициентов ξ' и η' по сравнению с коэффициентами при четырех стандартно расположенных опознаках. Изменился только коэффициент c_0', величина которого указывает, что при ориентировании по четырем опознакам среднее арифметическое из ошибок отметок точек в пределах стереопары не равно нулю. Действительно, проинтегрировав по площади уравнение (11) и разделив на площадь стереопары, получим величину, равную c_0' из (18). Подставляя в (18) значения A из (1) и заменяя $(\alpha'-\alpha)$ на его среднее квадратическое значение для плоской местности, получаем

$$c_0' = \frac{H\, m_q}{6y}, \tag{20}$$

где y — ордината стандартных точек при взаимном ориентировании; m_q — средняя квадратическая ошибка измерения поперечных параллаксов.

При $m_q=0{,}01$ *мм* и $y=70$ *мм* среднее значение c_0' составляет $\frac{1}{42000}H$, что значительно меньше величин ошибок в углах стереопары. Поэтому можно считать, что геодезическое ориентирование на универсальном приборе по четырем стандартно расположенным опознакам в рассматриваемом случае практически оптимально уменьшает влияние взаимного ориентирования по сравнению с любым другим числом и расположением опознаков на стереопаре.

Если вычислить среднюю квадратическую величину ошибок отметок в пределах стереопары при неограниченном числе опознаков, то найдем

$$m_{Z_{\text{ср}}} = b\sqrt{\frac{b^2}{180}A^2 + \frac{y^2_{\max}}{36}B^2}. \tag{21}$$

Подставляя вместо A^2 и B^2 их средние значения, имеем

$$m_{Z_{\text{ср}}} = \frac{Hm_q}{f}\sqrt{\frac{b^2}{180}Q_{\Delta\alpha\Delta\alpha} + \frac{y^2_{\max}}{36}Q_{\omega\omega}}. \tag{22}$$

В работе [3] при выводе формулы, аналогичной (22), имеется, по нашему мнению, необоснованное допущение, что $E=c_0$, поэтому под корнем в первом слагаемом стоит в знаменателе вместо 180 число 80.

Сравнивая формулы (22) и (15), видим, что увеличение числа опознаков уменьшает среднюю квадратическую по стереопаре ошибку отметок, но, с другой стороны, из (19) следует, что в углу стереопары ошибка несколько увеличится. Следовательно, это еще раз подтверждает, что четыре стандартно расположенные опознака для универсального прибора являются наиболее оптимальной схемой для уменьшения влияния ошибок взаимного ориентирования при геодезическом ориентировании.

Приведенный анализ основан на том допущении, что снимаемая местность близка к горизонтальной плоскости. Рельеф местности будет влиять двояким образом: во-первых, превышения опознаков усложняют решение системы (6), так как коэффициенты $A_i \ldots E_i$ (см. также формулу (1)) зависят от продольных параллаксов опознаков; во-вторых, превышения точек, выбранных для взаимного ориентирования, над центральными точками снимков существенно увеличивают ошибки элементов взаимного ориентирования и вызывают их корреляционную зависимость.

Влияние превышений опознаков при стандартном их расположении на величину наибольшей ошибки отметки может быть учтено сравнительно просто. Для этого рассмотрим формулу средней квадратической величины наибольшей ошибки случая фотографирования V-образной местности, когда базис фотографирования расположен вдоль впадины в плоскости ее симметрии.

Опуская громоздкие вычисления, отмечаем, что наибольшую ошибку будут иметь точки, расположенные в углу стереопары, и что средняя квадратическая величина наибольшей ошибки вычисляется по следующей формуле:

$$m_z = \frac{(H - h_{\max})^2\, y_{\max}\, m_q}{2fH} \sqrt{Q_{\omega\omega}}, \tag{23}$$

где $h_{\max}$ — превышение точки с $y_{\max}$ над центральной точкой снимка.

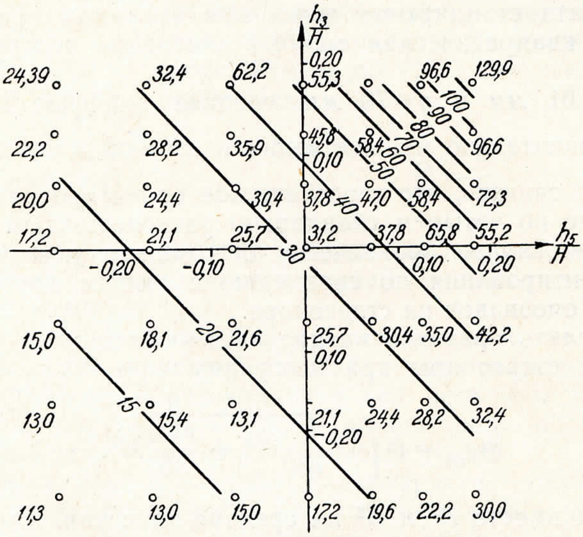

Рис. 2. График величин $Q_{\omega\omega} \cdot 10^{-5}$ для $f = 100$ *мм*; $y = 70$ *мм*.

При произвольной форме рельефа формула (23) дает значение, очень близкое к вычисленному по строгим формулам, и только в некоторых случаях будет наблюдаться завышение ошибки в пределах 10—20%. При вычислении m_Z превышение $h_{\max}$ следует брать со своим знаком и в том углу стереопары, где величина $\frac{(H-h)^2}{H}$ будет наибольшей.

На рис. 2 показаны изолинии значений $Q_{\omega\omega}$ для различных значений величин отношений $\frac{h_3}{H}$ и $\frac{h_5}{H}$, где h_3 и h_5 — превышения стандартных точек взаимного ориентирования над центральной точкой *1; H* — высота фотографирования относительно точки *1.* При построении графика принималось, что профиль местности по осям обоих снимков одинаков и что элементы взаимного ориентирования определяются по шести точкам по методу наименьших квадратов. При соответствующей методике взаимного ориентирования оптико-механическим способом можно считать, что точность угла соответствует уравнению поперечных параллаксов, измеренных на шести точках. Из графика на рис. 2 видно, что величина $Q_{\omega\omega}$ практически зависит только от величины суммы отношений превышений точек *3* и *5* к высоте фотографирования *H,* так как изолинии очень близки к прямым линиям, составляющим угол 45° с осями координат. Следовательно, формулу для $Q_{\omega\omega}$, выведенную в [1] для V-образного рельефа можно преобразовать для случая любых превышений h_3 и h_5. Подставив в указанную формулу вместо разности продольных параллаксов их выражения через отношение $\frac{h_3 + h_5}{H}$, после несложных преобразований и незначительных упрощений находим

$$\sqrt{Q_{\omega\omega}} = \frac{\sqrt{3}\, f}{y^2} \cdot \frac{1}{2 - \left(1 + \frac{f^2}{y^2}\right) \frac{(h_3 + h_5)}{H}}. \tag{24}$$

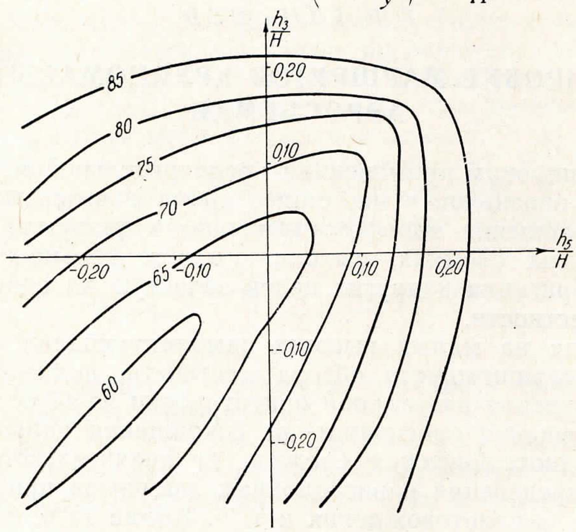

Рис. 3. График величины m_z.

С учетом формулы (24), принимая $y_{\max} = y$, из (23) получим окончательную формулу для средней квадратической величины наибольшей ошибки отметки в пределах стереопары

$$m_z = \frac{\sqrt{3}(H - h_{\max})^2 m_q}{2Hy\left[2 - \left(1 + \frac{f^2}{y^2}\right)\frac{(h_3 + h_5)}{H}\right]}. \tag{25}$$

Формула (25) достаточно проста и может быть использована для расчета влияния взаимного ориентирования на точность отметок практически при любом рельефе снимаемой местности.

На рис. 3 показаны изолинии величины m_z, рассчитанной по формуле (25) при следующих данных: $f = 100$ *мм*, $y = 70$ *мм*, $m_q = 0{,}01$ *мм*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипов И. Т. О влиянии рельефа на точность решения задачи взаимного ориентирования при аналитических методах обработки аэроснимков. — Тр. Новосибирского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, т. XXI. Новосибирск, 1968.
2. Павлов В. И. О точности определения высот точек в зависимости от продольного перекрытия аэроснимков. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 6. М., 1960.
3. Решетов Е. А. Некоторые вопросы оценки точности фотограмметрических измерений. — «Геодезия и картография», № 1, 1970.
4. Скиридов А. С. Стереофотограмметрия. М., Геодезиздат, 1959.
5. Hadem I. On the accuracy of stereoplotting of convergent and vertical aerial photographs in mountain terrain. «Melb. Narges Candbrukshogskol», 1967, 46, № 1.
6. Hallert B. Über die Genauigkeit der Zuftphotogrammetrie. Stockholm, Esseltej, 1956.

Работа поступила в редколлегию 15 декабря 1971 года. Рекомендована кафедрой геодезии Донецкого политехнического института.