УДК 528.14/16

И. И. МОНИН

О СОСТАВЛЕНИИ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ

В [1] предложен единый алгоритм для уравнивания и оценки точности геодезических построений. В дальнейшем [2, 3] прием такого составления условных уравнений был применен для уравнивания обширных геодезических сетей.

Однако этот алгоритм до сих пор не получил широкого практического применения, что объясняется, вероятно, сложностью его изложения. Более того, в перечисленных работах не приведены конкретные примеры уравнивания геодезических сетей при помощи данного алгоритма, в связи с чем возникают трудности его изучения.

В настоящей статье дано простое изложение алгоритма уравнивания М. Д. Герасименко и приведен пример его реализации.

Теория метода заключается в следующем. Рассмотрим сеть триангуляции. По необходимым углам и исходным данным определяем координаты неизвестных пунктов. Дифференцируя полученные функции, находим

$$X = FV_t, \tag{1}$$

где X — матрица-столбец поправок в координаты определяемых пунктов, V_t — матрица-столбец поправок в необходимые углы, F — квадратная матрица коэффициентов.

По приближенным координатам определяем значения избыточных углов. Продифференцировав полученные функции, имеем

$$V_c = DX, \tag{2}$$

где $V_{\bar{c}}$ — матрица-столбец поправок в избыточные углы, X — матрица-столбец поправок в координаты определяемых пунктов, D — матрица коэффициентов.

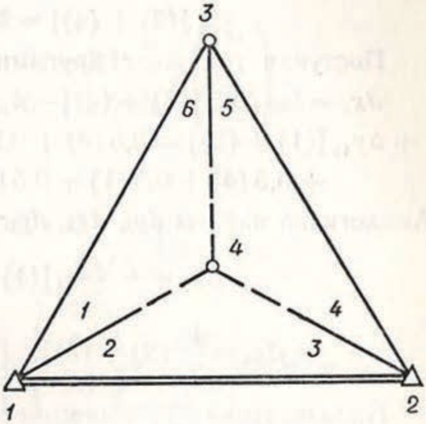
Для избыточных углов запишем условие

$$c + V_c = \bar{c} + V_{\bar{c}}\text{, или } V_{\bar{c}} - V_c + W = 0, \tag{3}$$

где $W = \bar{c} - c$; c, $\bar{c}$ — измеренные и вычисленные значения углов; V_c, $V_{\bar{c}}$ — их поправки. Учитывая (1) и (2), из (3) получаем условное уравнение в матричной записи

$$DFV_t - V_c + W = 0. \tag{4}$$

Приведем пример применения алгоритма М. Д. Герасименко для сети триангуляции, изображенной на рисунке. Пусть все углы приблизительно равны 30°, а стороны ≈ 1. Дирекционный



Сеть триангуляции.

угол линии 12 равен 90°. Примем углы *1, 2, 3* и *4* за необходимые, а углы *5* и *6* — за избыточные. Координаты пунктов *3* и *4* получим таким образом:

$$x_3 = x_1 + \Delta x_{13} = x_1 + \frac{a \sin(3+4)}{\sin(1+2+3+4)} \cos(A_{12} - 1 - 2),$$

$$y_3 = y_1 + \Delta y_{13} = y_1 + \frac{a \sin(3+4)}{\sin(1+2+3+4)} \sin(A_{12} - 1 - 2),$$

$$x_4 = x_1 + \Delta x_{14} = x_1 + \frac{a \sin 3}{\sin(2+3)} \cos(A_{12} - 2),$$

$$y_4 = y_1 + \Delta y_{14} = y_1 + \frac{a \sin 3}{\sin(2+3)} \sin(A_{12} - 2). \tag{4a}$$

Продифференцировав первую формулу, найдем

$$dx_3 = \frac{a \cos(3+4)}{\sin(1+2+3+4)} \cos(A_{12} - 1 - 2)\,[(3) + (4)] -$$

$$- \frac{a \sin(3+4)}{\sin^2(1+2+3+4)} \cos(1+2+3+4) \cos(A_{12} - 1 - 2) \times$$

$$\times [(1)+(2)+(3)+(4)] - \frac{a \sin(3+4)}{\sin(1+2+3+4)} \times$$

$$\times \sin(A_{12}-1-2)[-(1)-(2)]. \qquad (5)$$

Помножив первое слагаемое на $\frac{\sin(3+4)}{\sin(3+4)}$ и выделив $\mathrm{ctg} \times (3+4) = \delta_{3+4}$, получим

$$\mathrm{ctg}(3+4)\frac{a\sin(3+4)}{\sin(1+2+3+4)}\cos(A_{12}-1-2)\times$$

$$\times [(3)+(4)] = \delta_{3+4}\Delta x_{13}[(3)+(4)].$$

Поступая так же с другими слагаемыми, запишем

$$dx_3 = \delta_{60^\circ}\Delta x_{13}[(3)+(4)] - \delta_{120^\circ}\Delta x_{13}[(1)+(2)+(3)+(4)] +$$
$$+\Delta y_{13}[(1)+(2)] = 0{,}5(3)+0{,}5(4)+0{,}5(1)+0{,}5(2)+0{,}5(3)+$$
$$+0{,}5(4)+0{,}5(1)+0{,}5(2) = (1)+(2)+(3)+(4).$$

Аналогично найдем dy_3, dx_4, dy_4:

$$dy_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}[(1)+(2)-(3)-(4)],$$

$$dx_4 = \frac{1}{3}[(2)+(3)], \quad dy_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}[(2)-(3)]. \qquad (6)$$

Произведение FV_t принимает вид

$$FV_t = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

По вычисленным координатам пунктов *2, 1, 3* и *4* определим значение углов *5* и *6*:

$$5 = \mathrm{arctg}\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3} - \mathrm{arctg}\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3},$$

$$6 = \mathrm{arctg}\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3} - \mathrm{arctg}\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}. \qquad (8)$$

Продифференцировав эти выражения, вычисляем произведение DX:

$$d5 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Delta y_{34}}{\Delta x_{34}}\right)^2}\left(\frac{\Delta x_{34}(dy_4-dy_3)}{dx_{34}^2} - \frac{\Delta y_{34}(dx_4-dx_3)}{\Delta x_{34}^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta y_{32}}{\Delta x_{32}}\right)^2}\left(\frac{\Delta x_{32}(dy_2-dy_3)}{\Delta x_{32}^2} - \frac{\Delta y_{32}(dx_2-dx_3)}{\Delta x_{32}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x_{34}^2 + \Delta y_{34}^2} (\Delta x_{34}\, dy_4 - \Delta x_{34}\, dy_3 - \Delta y_{34}\, dx_4 + \Delta y_{34}\, dx_3) -$$

$$- \frac{1}{\Delta x_{32}^2 + \Delta y_{32}^2} (-\Delta x_{32}\, dy_3 + dy_{32}\, dx_3) = -\frac{1}{2} dx_3 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{3}\, dy_3 - \sqrt{3}\, dy_4;$$

$$d6 = -\frac{1}{2} dx_3 - \frac{1}{2} \sqrt{3}\, dy_3 + \sqrt{3}\, dy_4;$$

$$DX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \xi_4 \\ \eta_4 \end{pmatrix}.$$

Формула (4) принимает вид

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (5) \\ (6) \end{pmatrix} + W = 0.$$

Или в обычной записи:

$$-(1) - (3) - (5) + W_1 = 0,$$

$$-(2) - (4) - (6) + W_2 = 0.$$

Таким образом, составление условных уравнений по М. Д. Герасименко сводится к вычислению элементов матриц D и F. Для получения матрицы D надо поправки в избыточные измерения выразить через поправки в координаты определяемых пунктов. Чтобы получить матрицу F, нужно поправки в координаты определяемых пунктов выразить через поправки в необходимые измерения. М. Д. Герасименко не дал конкретных формул для вычисления матриц D и F.

Однако для матрицы D можно найти общий алгоритм ее составления, так как зависимость между поправками в избыточные углы и поправками в координаты определяемых пунктов, получаемая дифференцированием уравнений (8), представляет собой не что иное, как обычное уравнение поправок для углов параметрического метода уравнивания триангуляции без свободных членов. Например, для угла 5 имеем

$$(5) = dA_{34} - dA_{32} = a_{34}\, \xi_3 + b_{34}\, \eta_3 - a_{34}\, \eta_3 - b_{34}\, \eta_4 - a_{32}\, \xi_3 - b_{32}\, \eta_3;$$

$$a_{34} = \rho'' \frac{\sin A_{34}}{S_{34}}, \quad b_{34} = -\rho'' \frac{\cos A_{34}}{S_{34}}.$$

Написав такие уравнения для всех избыточных углов и вычислив коэффициенты a и b, нетрудно составить матрицу D.

Что касается матрицы F, то для ее составления нужно каждый раз записывать уравнения типа (4а), дифференцировать их; только после этого находить элементы матрицы F. Для этой матрицы, как видно, трудно составить общий алгоритм.

Список литературы: 1. *Герасименко М. Д.* Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений. — Тр. НИИГАиК, 1975, вып. 34. 2. *Герасименко М. Д.* Уравнивание обширных геодезических сетей многогрупповым коррелатным способом. — Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, вып. 1. 3. *Герасименко М. Д.* К вопросу о последовательном уравнивании геодезических сетей. — Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, вып. 4.

Статья поступила в редколлегию 09. 11. 82