УДК 528.14

А. А. РЕМИНСКИЙ

РЕШЕНИЯ ТРЕХКРАТНОЙ ПРЯМОЙ ЗАСЕЧКИ С УЧЕТОМ ВЕСОВ

Для решения прямых засечек воспользуемся формулами аналитической геометрии, в частности уравнением линий в нормальной форме, заменив в нем угол, задающий направление нормали к прямой на направление (дирекционный угол) α, самой прямой:

$$-\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y-p=0. \tag{1}$$

Здесь p — расстояние от начала координат до прямой, которое найдем, подставив в (1) координаты исходной точки x_T, y_T, где определяли дирекционный угол

$$p=-\sin\alpha\cdot x_T+\cos\alpha\cdot y_T. \tag{2}$$

Для однократной прямой засечки будем иметь два линейных уравнения вида (1), которые имеют единственное решение относительно двух неизвестных координат искомой точки:

$$-\sin\alpha_1 x + \cos\alpha_1 y - p_1 = 0;$$
$$-\sin\alpha_2 x + \cos\alpha_2 y - p_2 = 0. \qquad (3)$$

Для решения многократной засечки ограничимся тремя направлениями, поскольку в этом случае можно указать признак строгости найденного решения.

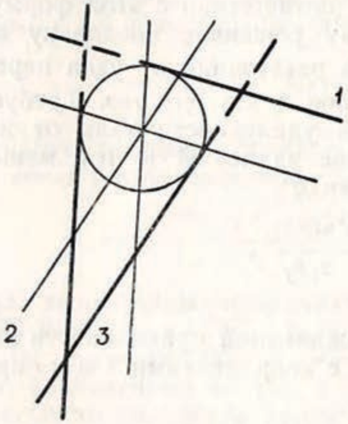

Рис. 1. Треугольник погрешностей, образованный тремя направлениями.

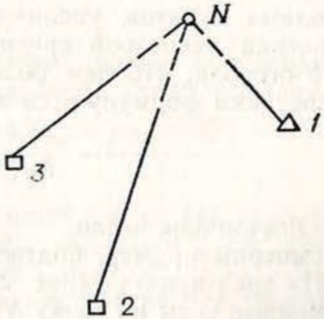

Рис. 2. Прямая засечка из трех пунктов.

Действительно, направления, измеренные на трех исходных пунктах, вследствие погрешностей измерений не пересекутся в одной точке, а образуют треугольник погрешностей (рис. 1), вершинами которого будут попарные решения, найденные, например, по (3). Если любое из них принять в качестве окончательного, то два направления поправок не получат, а третье воспримет всю невязку. Это не соответствует принципу наименьших квадратов. Оптимальным было бы внесение равных поправок во все три результата угловых измерений в предположении, что измерения выполнены равноточно.

В случае трех направлений можно найти единственное решение, обеспечивающее внесение равных поправок в измеренные углы. Воспользуемся этим как признаком, указывающим на получение строгого решения. Окончательным решением может быть центр окружности, вписанной в треугольник погрешностей. Смещение линий на одинаковую величину — радиус вписанной окружности r — при одинаковых расстояниях до исходных пунктов обеспечил бы равные поправки в измеренные углы.

В общем случае решение будем искать в виде весовой арифметической середины попарных решений. При этом веса должны учитывать внутреннюю геометрию узла пересечений (вид треугольника погрешностей), и неравенство расстояний до исходных пунктов.

Вес парного решения x_{ij}, y_{ij} в пересечении i-й и j-й линий можно было бы установить, исходя из известной (например, [2, с. 392]) формулы средней квадратической погрешности решения прямой засечки,

$$M_{ij}=\frac{m_\beta}{\rho}\frac{\sqrt{s_i^2+s_j^2}}{\sin\gamma_{ij}}\ . \qquad (4)$$

Однако веса, назначенные в соответствии с этой формулой, не приводят к удовлетворительному решению, поскольку значение $\sqrt{s_i^2+s_j^2}$ не меньше большего из расстояний от узла пересечений до исходных пунктов, увеличенное в $\sin^{-1}\gamma_{ij}$ раз. Требуется характеристика некоторой средней удаленности узла от исходных точек. Учитывая, что чем больше удаленность, тем меньше точность, составим формулу веса в виде

$$p_{ij}=\frac{c\sin\gamma_{ij}}{s_i s_j}\ , \qquad (5)$$

где c — постоянное число.

Рассмотрим пример, подтверждающий правильность этой формулы. На трех пунктах (рис. 2) с координатами x и y определены дирекционные углы на точку N:

Углы	x	y	Дирекционные углы
1	1101,192	6633,020	308°37′21″
2	674,902	6077,193	27 42 42
3	1087,801	6037,765	61 04 03

Им соответствуют уравнения прямых вида (1):

$$\begin{aligned}0{,}781275\,x+0{,}624187\,y-5000{,}578&=0;\\ -0{,}465022\,x+0{,}885299\,y-5066{,}289&=0;\\ -0{,}875190\,x+0{,}483779\,y-1968{,}911&=0,\end{aligned} \qquad (6)$$

попарные решения которых дают следующие координаты определяемой точки:

$$\begin{aligned}x_{12}&=1287{,}978, & y_{12}&=6399{,}224;\\ y_{13}&=1287{,}757, & y_{13}&=6399{,}500;\\ x_{23}&=1287{,}453, & y_{23}&=6398{,}948.\end{aligned}$$

Для назначения весов нужны расстояния до твердых точек. По имеющимся координатам оценим их как $s_1=299$, $s_2=692$, $s_3=413$ м. Синусы углов в точках пересечения прямых найдем по формуле [1, с. 204]

$$\sin\gamma_{ij}=|\sin\alpha_i\cos\alpha_j-\sin\alpha_j\cos\alpha_i|,$$

они составляют: $\sin\gamma_{12}=0{,}9819$; $\sin\gamma_{13}=0{,}9243$; $\sin\gamma_{23}=0{,}5498$. Для сравнения найдем весовую середину дважды с весами, вычисленными по (4) и (5):

Формула и c	p_{12}	p_{13}	p_{23}	Σp
(4), $c=299^2+692^2$	0,9641	1,868	0,2645	3,097
(5), $c=299\times692$	0,9819	1,549	0,3981	2,929

Соответственно получены следующие средние весовые значения координат. По (4) $x_{ср}=1287,800$; $y_{ср}=6399,367$; По (5)

$$x_{ср}=1287,790; \qquad y_{ср}=6399,332.$$

Вычислим поправки в дирекционные углы для тех и других координат. Поправка в дирекционный угол равна смещению точки $x_{ср}$, $y_{ср}$ с i-й линии δ_i, деленному на расстояние s_i, т. е.

$$\delta_{\alpha i}=\frac{\delta_i \rho}{s_i}.$$

Чтобы найти смещение точки с линии, нужно подставить координаты точки в уравнение линии [1, с. 203]. Таким образом, имеем

$$\delta_{\alpha i}=\frac{(-\sin\alpha_i x_{ср}+\cos\alpha_i y_{ср}-p_i)\,206000''}{s_i}.$$

Тогда для вычисленных координат получаем: по (4) ($x_{ср}=1287,800$; $y_{ср}=6399,367$) $\delta_{\alpha1}=-35''$, $\delta_{\alpha2}=62''$, $\delta_{\alpha3}=-51''$; по (5) ($x_{ср}=$ $=1287,790$; $y_{ср}=6399,332$) $\delta_{\alpha1}=-55''$, $\delta_{\alpha2}=54''$, $\delta_{\alpha3}=-55''$.

Веса, назначенные по (5), с учетом внутренней геометрии узла пересечений позволили получить решение, обеспечивающее равенство поправок в измеренные углы, что и требовалось.

При параметрическом уравнивании, выбрав в качестве параметров координаты определяемой точки, составим матрицы коэффициентов уравнений линии B и значений p, вычисляемых по формуле (2)

$$B=\begin{pmatrix} 0,781275 & 0,624187 \\ -0,465022 & 0,885290 \\ -0,875190 & 0,483779 \end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix} 5000,578 \\ 5066,289 \\ 1968,911 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления матрицы нормальных уравнений $C=BTPB$ необходимо установить весовую матрицу P с таким расчетом, чтобы учитывать не только расстояния до исходных пунктов, но и внутреннюю геометрию узла пересечений. Чем острее углы пересечений данной линии с другими, тем весомее данная линия, т. е.

$$p_i=\frac{c}{s_i\prod\limits_{j=1}^{n}\sin\gamma_{ij}}, \quad (j=1,2,\cdots,n;\ j\neq i). \tag{7}$$

Таким образом, приняв в нашем примере $c=299$, получим матрицу весов:

$$P=\begin{pmatrix} 1,10 & & 0 \\ & 0,80 & \\ 0 & & 1,42 \end{pmatrix},$$

тогда
$$C = BTPB = \begin{pmatrix} 1{,}93208 & -0{,}394145 \\ -0{,}394145 & 1{,}38791 \end{pmatrix}$$
и
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}549404 & 0{,}156022 \\ 0{,}156022 & 0{,}764815 \end{pmatrix}.$$
Перенесем начало координат в точку приближенного решения
$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1288 \\ 6399 \end{pmatrix}$$
и вычислим удаление линий с уравнениями B от этой точки:
$$W = BX^{(0)} - L = \begin{pmatrix} -0{,}1232 \\ -0{,}2090 \\ -0{,}4539 \end{pmatrix}.$$
Тогда вектор свободных членов матрицы нормальных уравнений составит
$$-f = B^{\text{т}} PW = \begin{pmatrix} +0{,}53597 \\ -0{,}54443 \end{pmatrix}.$$
Вектор поправок δ_X к приближенным координатам $X^{(0)}$ будет
$$\delta_x = C^{-1} f = \begin{pmatrix} -0{,}2095 \\ +0{,}3328 \end{pmatrix},$$
таким образом, координаты определяемой точки
$$X = X^{(0)} + \delta_x = \begin{pmatrix} 1287{,}7905 \\ 6399{,}3328 \end{pmatrix}$$
и совпали с координатами, вычисленными ранее способом весовой арифметической середины с весами, найденными по (5), и, следовательно, обеспечат равенство поправок в измеренные углы.

Список литературы: 1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1965. 2. *Селиханович В. Г.* Геодезия. — М.: Недра, 1981, ч. 2.

Статья поступила в редколлегию 21. 11. 82