УДК 528.7.

И. И. МИЩЕНКО, Х. В. БУРШТЫНСКАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ ПОСТРОЕНИЯ МАРШРУТНЫХ СЕТЕЙ АЭРОФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ

Для оценки точности пространственных фототриангуляционных сетей необходимо определить ковариационную матрицу, характеризующую накопление погрешностей в сети пространственной фототриангуляции.

В задачу исследования входила разработка методики определения ковариационной матрицы погрешностей высот ориентированной маршрутной фототриангуляционной сети.

Погрешности точек ориентированной высотной сети можно представить в виде линейных функций погрешностей элементов построения маршрута [2, 3]:

$$\delta\Delta Z_k = U_1\|d\alpha_{\text{л}i}\| + U_2\|d\alpha_{\text{п}i}\| + U_3\|d\omega_i\| + U_4\|d(\varkappa_{\text{п}} - \varkappa_{\text{л}})_i\| + \\ + U_5\|d(\Delta P)_i\| + U_6\|(dp)_j\|, \tag{1}$$

где k — номер модели, в которой расположена точка; U — матрицы-строки, вид элементов которых зависит от числа и расположения опознаков и степени полинома деформации маршрута; $\|d\alpha_{\text{л}i}\|$, $\|d\alpha_{\text{п}i}\|$, ..., $\|dp_j\|$ — матрицы-столбцы, элементами которых служат соответствующие погрешности i-й модели или звена, где расположен j-й опознак; $i=1, 2, \ldots, k, \ldots, n$; n — число базисов в сети; $j=1, 2, \ldots, m$; m — количество опорных точек, по которым производится определение коэффициентов полинома для учета деформации маршрута;

$$d(\Delta P)_i = (2dp_1 + dp_3 + dp_5)_i - (2dp_2 + dp_4 + dp_6)_{i-1}; \tag{2}$$

$d(\Delta P)$ — погрешности параллаксов связующих точек; 1, 2, ..., 6 — номер связующей точки;

$$(dp)_j = (dp_i + dp_{i+1})_j; \tag{3}$$

$(dp)_j$ — погрешность параллаксов j-го опознака в i-й и $(i+1)$-й моделях.

Вектор погрешностей высот точек маршрута от первой до n-й моделей запишем

$$\delta\Delta Z = U\delta l, \tag{4}$$

где U — матрица коэффициентов при погрешностях элементов построения маршрута; δl — вектор погрешностей элементов построения маршрута от первой до n-й моделей.

Для получения ковариационной матрицы погрешностей высот точек моделей, используя (4), перейдем от равенств с векторными погрешностями к равенствам с ковариационными матрицами [1]. Получим

$$K_{\Delta Z} = UK_lU^{\text{т}}. \tag{5}$$

Здесь $K_{\Delta Z}$ — ковариационная матрица погрешностей высот; K_l — ковариационная матрица погрешностей элементов построения сети.

Ковариационную матрицу K_l для n моделей сети запишем в виде

$$K_l = \begin{Vmatrix} K_1 & K_{12} \cdots K_{1n} \\ & K_2 \ \cdots K_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad\quad K_n \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — ковариационные матрицы погрешностей элементов первой, второй до n-й моделей; $K_{12}, \ldots, K_{1n}$, K_{2n} — ковариационные матрицы, характеризующие взаимные связи погрешностей элементов построения всех моделей.

Методика определения и аналитические выражения коэффициентов при различном количестве опознаков в маршруте и произвольной степени полинома для учета деформации сети приведены в [3].

Определим ковариационные матрицы K_l при действии систематических и случайных погрешностей в маршруте аэрофототриангуляции.

Если присутствуют систематические искажения аэрофотоснимков, погрешности элементов построения маршрута в общем случае (из-за нарушения стандартного положения точек, наличия рельефа местности и т. д.) будут случайными величинами.

В этом случае числовыми характеристиками погрешностей элементов построения маршрута являются математические ожидания $M[l]$ и ковариационная матрица K_l.

Под математическими ожиданиями $M[l]$ следует понимать значения погрешностей соответствующих элементов в случае построения сети по точкам стандартной схемы. Под математическим ожиданием $M[\delta\Delta Z_k]$ следует понимать погрешность высоты точки ориентированной сети, построенной по точкам стандартной схемы:

$$M[l]=(l)_0; \quad M[\delta\Delta Z_k]=(\delta\Delta Z_k)_0, \tag{7}$$

где $(l)_0$, $(\delta\Delta Z_k)_0$ — значения соответствующих погрешностей при стандартной схеме расположения точек.

Ковариационная матрица K_l будет характеризовать случайные погрешности элементов построения маршрута, обусловленные систематическими искажениями аэрофотоснимков. Согласно исследованиям, приведенным в [3], ковариации погрешностей элементов построения маршрута можно определить по формулам

$$K(l_\varepsilon\, l_\eta)_i = \sum_{N=1}^{N}\left(\frac{\partial l_\varepsilon}{\partial x_N}\cdot\frac{\partial l_\eta}{\partial x_N}+\frac{\partial l_\varepsilon}{\partial y_N}\cdot\frac{\partial l_\eta}{\partial y_N}\right) D\,[x], \tag{8}$$

$$K_{l_{\varepsilon\,(i-1)}\, l_{\eta\,(i)}} = \sum_{N=1,3}^{N}\left(\frac{\partial l_\varepsilon}{\partial x_{N+1}}\cdot\frac{\partial l_\eta}{\partial x_N}+\frac{\partial l_\varepsilon}{\partial y_{N+1}}\cdot\frac{\partial l_\eta}{\partial y_N}\right) D\,(x), \tag{9}$$

где l_ε, l_η — произвольные элементы вектора δl; N — количество точек в модели; $K_{(l_\varepsilon l_\eta)i}$ — ковариации, характеризующие систему погрешностей элементов построения сети внутри i-й модели; $K_{l_{\varepsilon\,(i-1)}\, l_{\eta(i)}}$ — ковариации, характеризующие систему погрешностей $(i-1)$-й и i-й моделей; $D[x]$ — дисперсия координат точек при нарушении стандартной схемы расположения точек.

Исследования показали, что ковариации, характеризующие зависимости между погрешностями элементов построения маршрута, существуют только для смежных моделей. Колебания погрешностей во всех других моделях являются независимыми величинами. Ковариации $K_{(l_\varepsilon\, l_\eta)_i}$ постоянны для всех моделей, а ковариации $K_{l_{\varepsilon\,(i-1)}\, l_{\eta i}}$ постоянны для любых $(i-1)$-х и i-х моделей.

Определение матрицы K_l в соответствии с (6) сведено к нахождению двух матриц $K_i=K_{(l_\varepsilon\, l_\eta)_i}$ и $K_{i-1,\,i}=K_{(l_\varepsilon\, l_\eta)i-1,\,i}$. При нахождении элементов указанных матриц определим производные вида

$$\frac{\partial\,(d\alpha_л)}{\partial x_N},\ \frac{\partial\,(d\alpha_п)}{\partial y_N},\ldots,\frac{\partial\,(d\varkappa_п)}{\partial y_N}.$$

Систематические искажения соответствующих элементов взаимного ориентирования представлены известной функцией от весовых коэффициентов и систематических искажений Δq_N поперечных параллаксов. Дифференцирование произведено по весовым коэффициентам, коэффициентам уравнений погрешностей и по Δq_N.

В качестве примера приведем полученное выражение для $\frac{\partial\,(d\alpha_л)}{\partial x_N}$: при $N=4,6$

$$\frac{\partial\,(d\alpha_л)}{\partial x_N}=\frac{1}{x}(d\alpha_л)_0+\frac{1}{2x}(d\alpha_п)_0+\frac{(f^2+y^2)}{2x^2\,y_N}(d\omega)_0-$$

$$-\frac{f}{xy_N}(d\varkappa_л)_0+\frac{f}{2xy_N}(d\varkappa_п)_0-\frac{f}{2x^2\,y_N}\Delta q_N-\frac{f}{2xy}\cdot\frac{\partial\,(\Delta q_N)}{\partial x_N}. \quad (10)$$

Здесь x — значение абсциссы при стандартной схеме расположения точек; x_N, y_N — координаты N-й точки; $(d\alpha_л)_0,\ \ldots,\ (d\varkappa_п)_0$, Δq_N — систематические искажения элементов взаимного ориентирования и поперечного параллакса.

Согласно (10) для определения элементов матрицы K_l необходимо знать вид функции, описывающей систематические искажения аэрофотоснимков.

Для дальнейшего решения задачи в качестве такой функции был выбран полином третьей степени:

$$\Delta x=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy+a_4x^2+a_5y^2+a_6x^3+a_7y^3+a_8x^2y+a_9xy^2;$$

$$\Delta y=b_0+b_1x+b_2y+b_3xy+b_4x^2+b_5y^2+b_6x^3+b_7y^3+$$

$$+b_8x^2y+b_9xy^2. \quad (11)$$

Формулы (7) для математических ожиданий погрешностей элементов взаимного ориентирования с учетом (11) примут вид:

$$\mathrm{M}[d\alpha_л]=(d\alpha_л)_0=-f(b_3+b_8p);\quad \mathrm{M}[d\alpha_п]=(d\alpha_п)_0=-f(b_3-b_8p);$$

$$\mathrm{M}[d\omega]=(d\omega)_0=fb_9p;\quad \mathrm{M}[d(\Delta\varkappa)]=d(\Delta\varkappa)]_0=b_4p. \quad (12)$$

Определим матрицу K_l. Для удобства записи разобьем матрицы $K_{(l_\xi\ l_\eta)_i}$ и $K_{(l_\xi\ l_\eta)i-1,\,i}$ на подматрицы

$$K_{l_\xi\ l_\eta}=\left\|\begin{array}{c|c} K_{ЭВО} & K_{ЭВО,\ \Delta P,\ dp} \\ \hline K_{\Delta P,\ dp,\ ЭВО} & K_{\Delta P,\ dp}\end{array}\right\|. \quad (13)$$

Здесь $K_{ЭВО}$ — ковариационная матрица, характеризующая погрешности элементов взаимного ориентирования; $K_{ЭВО,\ \Delta P,\ dp}$ — матрица, характеризующая зависимости между погрешностями элементов взаимного ориентирования и погрешностями параллаксов связующих точек; $K_{\Delta P,\ dp}$ — матрица, характеризующая погрешности продольных параллаксов связующих точек. Для матриц $K_{(\text{эво})_i}$ и $K_{(\text{эво})_{i-1,i}}$ получены следующие выражения:

$$K_{(\text{эво})_i} = D[x] \begin{Vmatrix} \frac{9f^2p^2}{2y^2} b_6^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9f^2p^2}{2y^2} b_6^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27f^2p^4b_6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6p^2b_6^2 \end{Vmatrix}, \quad (14)$$

$$K_{(\text{эво})_{i-1,i}} = D[x] \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{9f^2p^2}{2y^2} b_6^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20f^2p^4}{8y^4} b_6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3p^2b_6^2 \end{Vmatrix}. \quad (15)$$

Здесь b_i — коэффициенты полинома (11).

Обращает на себя внимание тот факт, что дисперсии погрешностей элементов взаимного ориентирования $D[d\alpha_\text{л}]$, $D[d\alpha_\text{п}]$, $D[d\omega]$, $D[d(\Delta\varkappa)]$ (диагональные элементы матрицы (14)) не зависят от систематических искажений соответствующих элементов (12). Следовательно, при определенных значениях коэффициентов полинома (11) вполне вероятен случай, когда дисперсии $D[d\alpha_\text{л}], \ldots, D[d(\Delta\varkappa)]$ будут превышать значения систематических искажений этих элементов.

Согласно (14) случайные погрешности элементов взаимного ориентирования, обусловленные нарушением стандартного положения точек на аэрофотоснимках, являются независимыми внутри i-й модели. В смежных моделях возникает тесная зависимость между колебаниями систематических погрешностей элементов $\alpha_{\text{л}(i-1)}$ и $\alpha_{\text{п}i}$, ω_{i-1} и ω_i, $\Delta\varkappa_{i-1}$ и $\Delta\varkappa_i$ (матрица 15). Из (14) и (15) следует, что значения корреляционных коэффициентов будут соответственно —1, —0,5, 0,5. Все ковариации матриц (14) и (15) — функции коэффициента b_6 полинома (11). Следовательно, нарушение стандартного положения точек на аэрофотоснимках приведет к возникновению случайных погрешностей элементов взаимного ориентирования лишь тогда, когда на аэрофотоснимках имеются систематические искажения ординат вида $\Delta y = b_6x^3$.

По нашим подсчетам, систематические искажения $\Delta y = b_6x^3 \leqslant \leqslant 0{,}02$ мм при построении маршрута по точкам нестандартной схемы вызовут случайные погрешности элементов взаимного ориентирования около $30''$—$1'$.

Нарушение стандартного положения точек на аэрофотоснимках приводит к тому, что возникающие случайные погрешности элементов взаимного ориентирования и случайные погрешности про-

$$K_{(\text{ЭВО},\,\Delta P,\,dp)_{i-1,\,i}} = D[x] \begin{Vmatrix} -6fp^2 b_6 a_9 & 0 & -\frac{3fpb_6}{2y}\frac{\partial(dp_3)}{\partial x_3} & 0 & \frac{3fd}{2y} b_6 \frac{\partial(dp_5)}{\partial x_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3fp^2}{2y^2} b_6 \frac{\partial(dp_1)}{\partial x_1} & 0 & \frac{3fp^2}{4y^2} b_6 \frac{\partial(dp_3)}{\partial x_3} & 0 & \frac{3fp^2}{4y^2} b_6 \frac{\partial(dp_5)}{\partial x_5} & 0 \\ 4pb_6 \frac{\partial(dp_1)}{\partial x_1} & 0 & pb_6 \frac{\partial(dp_3)}{\partial x_3} & 0 & pb_6 \frac{\partial(dp_5)}{\partial x_5} & 0 \end{Vmatrix}, \tag{16}$$

$$K_{(\text{ЭВО},\,\Delta P,\,dp)_i} = D[x] \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 0 & -6fp^2 b_6 a_9 & 0 & -\frac{3fp}{2y} b_6 \frac{\partial(dp_4)}{\partial x_4} & 0 & \frac{3fp}{2y} b_6 \frac{\partial(dp_6)}{\partial x_6} \\ 6fp^2 b_6 a_9 & 0 & \frac{3fp}{2y} b_6 \frac{\partial(dp_3)}{\partial x_3} & 0 & -\frac{3fp^2}{2y^2} b_6 \frac{\partial(dp_5)}{\partial x_5} & 0 \\ \frac{3fp^2}{2y^2} b_6 \frac{\partial(dp_1)}{\partial x_1} & -\frac{3fp^2}{2y^2} b_6 \frac{\partial(dp_2)}{\partial x_2} & -\frac{3fp^2}{4y^2} b_6 \frac{\partial(dp_3)}{\partial x_3} & \frac{3fp^2}{4y^2} b_6 \frac{\partial(dp_4)}{\partial x_4} & -\frac{3fp^2}{4y^2} b_6 \frac{\partial(dp_5)}{\partial x_5} & \frac{3fp^2}{4y^2} b_6 \frac{\partial(dp_6)}{\partial x_6} \\ 4pb_6 \frac{\partial(dp_1)}{\partial x_1} & 4pb_6 \frac{\partial(dp_2)}{\partial x_2} & pb_6 \frac{\partial(dp_3)}{\partial x_3} & pb_6 \frac{\partial(dp_4)}{\partial x_4} & pb_6 \frac{\partial(dp_5)}{\partial x_5} & pb_6 \frac{\partial(dp_6)}{\partial x_6} \end{Vmatrix}, \tag{17}$$

дольных параллаксов связующих точек являются зависимыми. Приведем матрицы $K_{\Delta P,\,dp,\,\text{ЭВО}}$, характеризующие эти зависимости в i-й и в смежных $(i-1)$-й и i-й моделях (16)—(18):

$$K_{(\Delta P,\,dp,\,\text{ЭВО})_{i-1,\,i}} = D\,[x] \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6fp^2 b_6 a_9 & \dfrac{3fp^2}{2y^2} b_6 \dfrac{\partial (dp_2)}{\partial x_2} & 4pb_6 \dfrac{\partial (dp_2)}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3fp}{2y} b_6 \dfrac{\partial (dp_4)}{\partial x_4} & -\dfrac{3fp^2}{4y^2} b_6 \dfrac{\partial (dp_4)}{\partial x_4} & pb_6 \dfrac{\partial (dp_4)}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{3fp}{2y} b_6 \dfrac{\partial (dp_6)}{\partial x_6} & -\dfrac{3fp^2}{4y^2} b_6 \dfrac{\partial (dp_5)}{\partial x_6} & pb_6 \dfrac{\partial (dp_6)}{\partial x_6} \end{Vmatrix}. \quad (18)$$

Здесь

$$\frac{\partial (dp_N)}{\partial x_N} = (2a_4 p - 3a_6 p^2) + y_N 2a_9 p + x_N 6a_6 p;$$

$$\frac{\partial (dp_N)}{\partial y_N} = (a_3 p - a_9 p^2) + x_N 2a_9 p + y_N 2a_8 p. \quad (19)$$

Коэффициенты корреляции, соответствующие ненулевым элементам матриц (16)—(18), составляют

для i-й модели

$$-r_{d\alpha_{\text{л}}\,dp_4} = r_{d\alpha_{\text{л}}\,dp_6} = r_{d\alpha_{\text{л}}\,dp_3} = -r_{d\alpha_{\text{л}}\,dp_5} = 0{,}7,$$

$$-r_{d\omega dp_3} = y_{p\omega dp_4} = -r_{d\omega dp_3} = r_{d\omega dp_6} = 0{,}29,$$

$$r_{d\,(\Delta x)\,dp_3} = \cdots = r_{d\,(\Delta x)\,dp_6} = 0{,}41;$$

для $(i-1)$ и i-й моделей

$$-r_{d\alpha_{\text{л}}\,dp_3} = r_{d\alpha_{\text{л}}\,dp_5} = r_{dp_4\,d\alpha_{\text{п}}} = -r_{dp_6\,d\alpha_{\text{п}}} = 0{,}7,$$

$$r_{d\omega dp_3} = r_{d\omega dp_5} = r_{dp_4\,d\omega} = -r_{dp_6\,d\omega} = 0{,}29,$$

$$r_{d\,(\Delta x)\,dp_3} = r_{d\,(\Delta x)\,dp_5} = r_{dp_4\,d\,(\Delta x)} = r_{dp_6\,d\,(\Delta x)} = 0{,}41.$$

Как показали выполненные исследования, значения указанных коэффициентов корреляции могут быть уменьшены в 1,5 раза, если отклонение от стандартной схемы происходит с постоянной дисперсией по осям x и y. При отклонении точек только вдоль оси y коэффициенты будут равны 0.

Перейдем к матрицам $K_{(\Delta P,\,dp)_i}$ и $K_{(\Delta P,\,dp)_{i-1,\,i}}$, характеризующим погрешности продольных параллаксов связующих и опорных точек. Элементы матриц $K_{(\Delta P,\,dp)_i}$ $K_{(\Delta P,\,dp)_{i-1,i}}$ получены, используя (8)—(9) с учетом (19). Естественно появление коэффициентов корреляции для связующих точек $(i-1)$ и i-й модели.

Выполненные исследования показали, что если искажения Δx, вызываемые каждым членом полинома (11), будут около 0,01 мм, то нарушение стандартной схемы точек приведет к дисперсии погрешностей dp и $d(\Delta P)$ 0,01 ... 0,014 мм. При этом очень важную роль играет не суммарная величина Δx, а преобладающее влияние отдельных членов полинома (11).

Таким образом, случайные погрешности элементов построения сети, причиной которых являются систематические искажения аэрофотоснимков, зависят не столько от значения систематических искажений (11), сколько от характера этих искажений.

Итак, нами получены элементы матрицы K_l при наличии систематических искажений аэрофотоснимков.

Чтобы получить матрицу K_l при действии случайных погрешностей, будем считать, что взаимные связи погрешностей между моделями, а также связи погрешностей элементов взаимного ориентирования и продольных параллаксов внутри модели незначительны.

В этом случае ковариационную матрицу погрешностей в i-й модели запишем в виде

$$K_l = \left\| \begin{array}{c|c} K_{\text{ЭВО}} & 0 \\ \hline 0 & K_{\Delta P dp} \end{array} \right\|. \tag{20}$$

Для вывода ковариационной матрицы погрешностей ЭВО воспользуемся формулой

$$K_{\text{ЭВО}} = \sigma_q^2 A^{-1}, \tag{21}$$

где A^{-1} — обратная матрица нормальных уравнений; σ_q^2 — дисперсия единицы веса.

Обратную матрицу нормальных уравнений для стандартной схемы расположения точек при определении элементов взаимного ориентирования в угловой системе запишем

$$A^{-1} = \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{f^2}{2x^2y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{f^2}{2x^2y^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{3f^2}{4y^4} & \frac{f}{4xy^4}(3f^2+2y^2) & \frac{f}{4xy^4}(3f^2+2y^2) \\ & & & \frac{f^2}{12x^2y^4}\left(9f^2+12y^2+\frac{8y^4}{f^2}\right) & \frac{f^2}{12x^2y^4}\left(9f^2+12y^2+\frac{4y^4}{f^2}\right) \\ & & & & \frac{f^2}{12x^2y^4}\left(9f^2+12y^2+\frac{8y^4}{f^2}\right) \end{array} \right\|. \tag{22}$$

Принимая $\sigma_q^2=\sigma_p^2=\sigma^2$, с учетом (2) и (3) матрицу K_l представим в виде

$$K_l=\sigma^2 \left\| \begin{matrix} A^{-1} & & \\ & 12 & \\ & & 2 \end{matrix} \right\| . \qquad (23)$$

Матрица записана для случая, когда опорные точки не совпадают со связующими. Имея (23) и (6), получим матрицу K_l. Искомая матрица $K_{\Delta z}$ может быть получена по (5) с учетом (6).

Предлагаемую методику теоретического определения ковариационной матрицы погрешностей ориентированной фототриангуляционной сети можно использовать и при других методах построения сети. Анализ ковариационных матриц позволяет выполнить объективную оценку точности существующих методов, а также использовать матрицы для уравнивания сетей по методу коллокации.

Список литературы: 1. *Гордеев А. В.* Теория случайных векторных ошибок. — Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка, 1967, № 6. 2. *Лобанов А. Н., Овсянников Р. П., Дубиновский В. Б.* и др. Фототриангуляция с применением электронной цифровой вычислительной машины. — М.: Недра, 1967. 3. *Мищенко И. И.* Оценка точности маршрутных сетей аэрофототриангуляции при наличии систематических ошибок снимка. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30.

Статья поступила в редколлегию 10. 03. 82