ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.33.031

В. И. АКУЛОВ

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ТОЧНОСТИ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ХОДОВ

Расчет полигонометрических ходов производится по известной формуле [1]

$$m_s^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2}[D^2] + \mu^2 [s] + \lambda^2 L^2, \tag{1}$$

где m_s — средняя квадратическая погрешность положения конечной точки хода, вычисленного по исправленным углам за угловую невязку; m_β — средняя квадратическая ошибка измерения угла; μ — коэффициент случайного влияния при измерении линии; λ — коэффициент систематического влияния при измерении линии; D — расстояние от центра тяжести до вершины полигона; $[s]$ — периметр полигона; L — длина замыкающей хода; $\rho = 206\,265''$.

Расчет допустимой относительной линейной невязки, а также точности угловых и линейных измерений полигонометрического хода, исходя из формулы (1), — процесс трудоемкий, так как для хода $[D^2]$ необходимо знать сумму квадратов расстояний от центра тяжести до вершины полигона. В связи с этим формула (1) не допускает каких-либо обобщений при расчете полигонов произвольной формы, что является одним из ее существенных недостатков.

Практический и теоретический интерес представляет выражение $[D^2]$ в формуле (1) через показатели полигонометрического хода: количество вершин и периметр.

Для установления связи $[D^2]$ с количеством вершин и периметром хода определим для различных форм замкнутого полигона коэффициент

$$\beta = \frac{\sqrt{[D^2]}}{[s]_0 \sqrt{N}}, \tag{2}$$

где N — количество вершин в полигоне; $[s]_0$ — периметр замкнутого полигона.

Из равенства (2) имеем

$$\frac{\sqrt{[D^2]}}{[s]_0} = \beta \sqrt{N}. \tag{3}$$

Установим значения коэффициента β для трех характерных форм замкнутых полигонов: а) правильного многоугольника (рис. 1); б) вытянутого равностороннего многоугольника (рис. 2); в) вытянутого равностороннего в одном направлении многоугольника (рис. 3).

Для правильного многоугольника (рис. 1)

$$[D^2]=R^2N \text{ и } [s]_0=aN,$$

поэтому

$$\beta=\frac{R}{aN}, \tag{4}$$

где R — радиус описанной окружности; a — сторона правильного многоугольника.

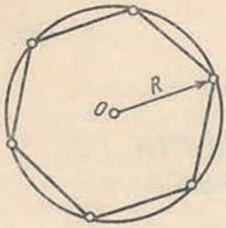

Рис. 1. Замкнутый полигон в виде правильного многоугольника

Рис. 2. Замкнутый вытянутый равносторонний полигон.

Рис. 3. Замкнутый вытянутый полигон, равносторонний в одном направлении.

При $N\to\infty$, то есть когда $aN=2\pi R$,

$$\beta_{N\to\infty}=\frac{1}{2\pi}=0{,}16.$$

Для замкнутого равностороннего полигона (рис. 2), как установлено автором,

$$[D^2]=\frac{N(N^2+8)}{48}s^2,$$

где s — длина стороны.

Подставляя $[D^2]$ в выражение (2) и учитывая, что $[s]_0=sN$, получаем

$$\beta=\frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{8}{N^2}}. \tag{5}$$

При $N\to\infty$

$$\beta_{N\to\infty}=\frac{1}{4\sqrt{3}}=0{,}14.$$

Для вытянутого замкнутого хода, равностороннего в одном направлении (рис. 3), то есть для разомкнутого равностороннего хода, как известно,

$$[D^2]=\frac{n(n+1)(n+2)}{12}s^2,$$

где n — количество сторон в разомкнутом ходе.

Периметр рассматриваемого замкнутого полигона равен

$$[s]_0=[s]+L$$

или

$$[s]_0=2ns. \tag{6}$$

Подставляя $[D^2]$ и $[s]$ в формулу (2), получаем

$$\beta = \frac{1}{4\sqrt{3N}}\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n}},$$

или

$$\beta = \frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{\frac{N+1}{N-1}}. \tag{7}$$

При $N \to \infty$

$$\beta_{N\to\infty} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = 0{,}14.$$

Значения коэффициента β для рассмотренных характерных форм замкнутых полигонов при различном количестве вершин указаны в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициента β для характерных форм замкнутых полигонов

Форма полигона	4*	6	8	10	12	15	24	48	96	∞
Правильный многоугольник	0,18	0,17	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
Вытянутый равносторонний многоугольник	0,18	0,16	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,14	0,14	0,14
Вытянутый равносторонний в одном направлении многоугольник	0,19	0,17	0,16	0,16	0,16	0,15	0,15	0,15	0,15	0,14

* Цифры в головке таблицы обозначают количество сторон многоугольника.

Из табл. 1 следует, что коэффициент β практически не зависит ни от формы, ни от количества вершин рассмотренных замкнутых полигонов и равен (при $N>6$) 0,15.

Значение коэффициента β для замкнутых полигонов произвольной формы (рис. 4) может быть установлено путем корреляционного анализа.

Таблица 2

Распределение замкнутых полигонов исследуемой группы по количеству вершин

Количество вершин в полигоне	Количество полигонов, абс.	Количество полигонов, %
4—10	56	37,7
11—20	60	40,0
21—30	25	16,7
31—40	5	3,4
41—50	2	1,3
51 и более	2	1,3
Всего	150	100,0

Таблица 3

Распределение замкнутых полигонов исследуемой группы по величине отношения s_{max} к s_{min} в полигоне

$\frac{s_{max}}{s_{min}}$	Количество полигонов, абс.	Количество полигонов, %
1—5	47	31,3
5—10	58	38,7
10—15	16	10,7
15—20	11	7,3
20—30	7	4,7
более 30	11	7,3
Всего	150	100,0

Для корреляционного анализа было взято 150 замкнутых и разомкнутых полигонов из геодезической и маркшейдерской практики с количеством вершин от 4 до 70 (табл. 2), с колебанием отношения длинной стороны (s_{max}) к короткой стороне (s_{min}) в полигонах от 1 до 157 (табл. 3) и периметрами от 121 *м* до 359,6 *км*.

Для каждого замкнутого полигона вычислено аналитическим способом отношение

$$\alpha = \frac{\sqrt{[D^2]}}{[s]_0} \tag{8}$$

и составлено уравнение

$$\beta\sqrt{N} - \alpha = \varepsilon. \tag{9}$$

В качестве примера на рис. 4 для полигонов, имеющих 12 вершин, указанно значение a, вычисленное по формуле (8).

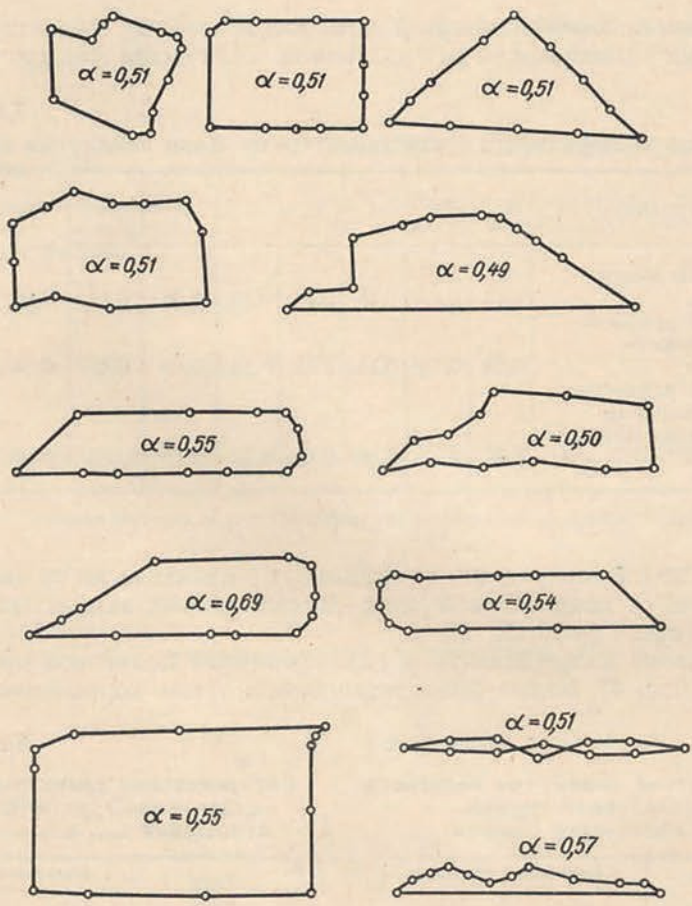

Рис. 4. Замкнутые полигоны произвольной формы с 12 вершинами.

Из решения по способу наименьших квадратов системы уравнений (9) для 150 исследуемых замкнутых полигонов получено $\beta = 0{,}149$ при коэффициенте корреляции $r\alpha/_{\sqrt{N}} = 0{,}97$.

Следовательно, коэффициент β для замкнутых полигонов произвольной формы соответствует его значению для рассмотренных ранее трех характерных форм замкнутых полигонов (рис. 1, 2 и 3).

Из выполненных исследований следует, что в замкнутых полигонах любой формы имеет место равенство

$$\frac{\sqrt{[D^2]}}{[s]_0} = 0{,}149\sqrt{N}. \tag{10}$$

В табл. 4 для полигонов исследуемой группы даны отклонения $\frac{\sqrt{[D^2]}}{[s]_0}$, вычисленного по формуле (10), от его действительного значения.

Таблица 4

Отклонения отношения $\sqrt{[D^2]}$ к $[s]_0$ от его действительного значения

Количество полигонов		Отклонения отношения $\frac{\sqrt{[D^2]}}{[s]_0}$, %
абс.	%	
71	47,3	0—5
52	34,7	5—10
22	14,7	10—15
5	3,3	15—20
Всего 150	100,0	

Из выражения (10) следует замечательное равенство

$$[D^2] = \frac{N}{45}[s]_0^2,$$

или

$$[D^2] = \frac{N}{45}([s] + L)^2. \tag{11}$$

Равенство (11) справедливо для любой формы замкнутого ($L=0$) и разомкнутого полигонометрического хода.

Подставляя $[D^2]$ из (11) в формулу (1), находим

$$m_s^2 = \frac{m_\beta^2 N}{45\rho^2}([s] + L)^2 + \mu^2[s] + \lambda^2 L^2. \tag{1a}$$

Выражение (1а) является общей формулой средней квадратической погрешности положения конечной точки полигонометрического хода произвольной формы, вычисленного по предварительно исправленным углам за угловую невязку.

Для замкнутого полигона ($L=0$) формула (1а) принимает вид

$$m_s^2 = \frac{m_\beta^2 N}{45\rho^2}[s]^2 + \mu^2[s]. \tag{12}$$

Для разомкнутого вытянутого равностороннего хода ($L=[s]$, $N=n+1$) формула (1а) имеет вид

$$m_s^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2}[s]^2\frac{n+1}{11} + \mu^2[s] + \lambda^2[s]^2. \tag{13}$$

Значения m_s, вычисленные по формуле (13), практически (при $n>8$) совпадают с найденными по известной в литературе формуле [1]

$$m_s^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2}[s]^2\frac{n+3}{12} + \mu^2[s] + \lambda^2[s]^2. \tag{14}$$

Формула (1а) позволяет установить общие способы расчета полигонометрических ходов произвольной формы.

Так, например, знаменатель T допустимой относительной линейной невязки полигонометрического хода, определяемый из уравнения

$$\frac{1}{T}=2\frac{m_s}{[s]},$$

равен

$$T=\frac{692\cdot 10^3}{m_\beta\sqrt{N(1+k)^2+\frac{45\,q^2}{[s]}+45\,k^2 r^2}}, \tag{15}$$

где

$$q=\frac{\mu\rho}{m_\beta},\ r=\frac{\lambda\rho}{m_\beta},\ k=\frac{L}{[s]}.$$

Для замкнутого полигона

$$T=\frac{692\cdot 10^3}{m_\beta\sqrt{N+\frac{45\,q^2}{[s]}}}. \tag{16}$$

Формула (15) позволяет для каждого полигонометрического хода установить допустимую относительную линейную невязку аналогично принятой для угловой невязки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чеботарев А. С., Селиханович В. Г., Соколов М. Н. Геодезия, ч. 2. Геодезиздат, 1962.

Работа поступила
30 октября 1968 года.