

Д. Г. ВИЛЬНЕР

О ТОЧНОСТИ КОМБИНИРОВАННОЙ ЗАСЕЧКИ БЕЗ СПЛОШНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

В последнее время вычисление комбинированной засечки без сплошных направлений («смешанной», по терминологии А. В. Буткевича) привлекло внимание ряда авторов [1, 2, 3]. Например, О. К. Некрасов рассмотрел вопрос оценки точности данного вида засечки [3]. У нас этот же вопрос излагается в ином аспекте.

Пусть на рисунке пункты B, C (расстояние между которыми равно b) и A — исходные. Точка P — определяемая, на ней измерен угол между направлениями на пункты B и C . На пункте A измерен угол α между направлениями на пункт C и на определяемую точку P .

В принятой системе координат положение исходных пунктов определяется координатами: $A - (0, 0)$; $B - (a + \frac{1}{2}b, c)$; $C - (a - \frac{1}{2}b, c)$.

Центр O окружности, в которой вписанный угол β опирается на хорду BC , имеет координаты $X_0 = a$; $Y_0 = l$, причем

$$l = c - \frac{b}{2 \operatorname{tg} \beta}, \quad (1)$$

а радиус окружности равен

$$r = \frac{b}{2 \sin \beta}. \quad (2)$$

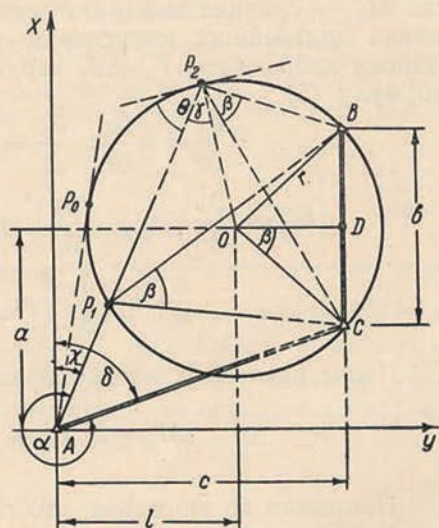
Направляющий тангенс прямой \overline{AP} равен

$$k = \operatorname{tg}(\delta + \alpha), \quad (3)$$

где $\delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{a - \frac{1}{2}b}$ — дирекционный угол начального направления AC , который вычисляется по координатам исходных пунктов.

Определяемая точка P располагается на пересечении двух линий положения (окружности радиусом r с центром в O и прямой \overline{AP}), уравнения которых

$$\left. \begin{aligned} (x-a)^2 + (y-l)^2 &= r^2; \\ y &= kx \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



Расположение точек засечки.

при совместном их решении позволяют получить координаты точки P :

$$X_P = \frac{a + kl \pm \sqrt{u}}{1 + k^2}; \quad Y_P = kX_P; \quad (5)$$

где

$$u = r^2(1 + k^2) - (ak - l)^2. \quad (6)^*$$

Заметим, что три возможных случая решения данной задачи определяются значением дискриминанта u :

а) два решения (точки P_1 и P_2 , как на рисунке), когда

$$r^2(1 + k^2) > (ak - l)^2, \quad (7a)$$

б) одно решение (точки P_1 и P_2 совпадают), когда

$$r^2(1 + k^2) = (ak - l)^2, \quad (7б)$$

в) ни одного решения (прямая не пересекается с окружностью), когда

$$r^2(1 + k^2) < (ak - l)^2. \quad (7в)$$

Рассматривая координаты X_P , Y_P как функции переменных r , l , k , квадратические ошибки которых соответственно равны m_r , m_l , m_k , записываем:

$$M_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 m_r^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 m_l^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial k}\right)^2 m_k^2, \quad (8a)^{**}$$

где M_x — средняя квадратическая ошибка координаты X_P . Для упрощения дальнейших вычислений выражаем среднюю квадратическую ошибку координаты Y_P — M_y через M_x , для чего записываем, используя формулу (5),

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial r} &= k \frac{\partial x}{\partial r}; \quad \frac{\partial y}{\partial l} = k \frac{\partial x}{\partial l}; \quad \frac{\partial y}{\partial k} = x + k \frac{\partial x}{\partial k}; \\ M_y^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 m_r^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 m_l^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial k}\right)^2 m_k^2 = k^2 \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 m_r^2 + \\ &+ k^2 \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 m_l^2 + \left(x + k \frac{\partial x}{\partial k}\right)^2 m_k^2. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований с учетом (8a) получаем

$$M_y^2 = k^2 M_x^2 + \left(x^2 + 2kx \frac{\partial x}{\partial k}\right) m_k^2. \quad (8б)$$

Принимая во внимание, что r , l , k как функции углов α и β , измеренных соответственно со средними квадратическими ошибками m_α , m_β , определены формулами (1), (2), (3), и полагая $m_\alpha = m_\beta$, находим:

$$m_r = \frac{b \cos \beta}{2 \sin^2 \beta} m_\beta, \quad m_l = \frac{b}{2 \sin^2 \beta} m_\beta, \quad m_k = \frac{m_\beta}{\cos^2(\delta + \alpha)} = (1 + k^2) m_\beta, \quad (9)$$

Частные производные в формулах (8a), (8б) (для точек P_1 и P_2) приведены для наглядности в табл. 1.

* Данное решение не следует считать еще одним способом получения координат точки, определенной комбинированной засечкой без сплошных направлений, которое могло бы применяться на практике. Оно имеет лишь методическое значение для исследования точности засечки с применением классических формул наименьших квадратов, понятных и учащимся, и широким кругам геодезистов и производственников.

** Здесь и ниже для упрощения записи при выводе формул X_P и Y_P заменены символами x и y .

Для конкретных расчетов средних квадратических ошибок M_x , M_y , выраженных через базис b и ошибку m_b , принимаем: $\beta=45^\circ$; $a=b$; $c=2b$; тогда остальные величины, характеризующие окружность в нашей задаче, равны $r = \frac{b}{\sqrt{2}}$; $l = \frac{3}{2} b$.

Таблица 1

Сводка важнейших формул

Величины	Для P_1 (ближе к A)	Для P_2 (дальше от A)	№ формул
u	$r^2(1+k^2) - (ak-l)^2$		(6)
x	$\frac{a+kl-\sqrt{u}}{1+k^2}$	$\frac{a+kl+\sqrt{u}}{1+k^2}$	(5a)
y	$kx = \frac{k(a+kl-\sqrt{u})}{1+k^2}$	$kx = \frac{k(a+kl+\sqrt{u})}{1+k^2}$	(5б)
$\frac{\partial x}{\partial r}$	$-\frac{r}{\sqrt{u}}$	$\frac{r}{\sqrt{u}}$	(10)
$\frac{\partial x}{\partial l}$	$\frac{k(\sqrt{u}-a)+l}{\sqrt{u}(1+k^2)}$	$\frac{k(\sqrt{u}+a)-l}{\sqrt{u}(1+k^2)}$	(11)
$\frac{\partial x}{\partial k}$	$(1+k^2)[l(\sqrt{u}-a)-k(r^2-a^2)] - 2k\sqrt{u}(a+kl-\sqrt{u})$	$(1+k^2)[l(\sqrt{u}+a)+k(r^2-a^2)] - 2k\sqrt{u}(a+kl+\sqrt{u})$	(12)
$\text{tg } \theta$	$\frac{\sqrt{u}(1+k^2)^2}{\sqrt{u} - ak-l}$	$\frac{\sqrt{u}(1+k^2)^2}{\sqrt{u} + ak-l}$	(15)

Что касается направления прямой \overline{AP} , то в расчет принимаем три его варианта: а) для рядового пересечения при $kp' = 1$ и $kp'' = 3/4$; б) для оптимального пересечения, когда \overline{AP} образует прямой угол с касательной к окружности в точке пересечения, то есть она совпадает с диаметром и проходит через центр окружности. В этом случае

$$k_0 = \frac{l}{a} = \frac{3}{2};$$

в) для пересечения близкого к предельному, когда точки P_1 и P_2 близки друг к другу, а угол между прямой \overline{AP} и касательной к окружности в точке пересечения предельно мал. Для определения $k_{\text{п}}$ при таком пересечении выполним некоторые расчеты.

Уравнение (7б) определяет условие касания прямой \overline{AP} с окружностью; из него следует:

$$(r^2 - a^2)k^2 + 2alk + (r^2 - l^2) = 0,$$

откуда

$$k_{1,2} = \frac{al \pm r\sqrt{a^2 + l^2 - r^2}}{a^2 - r^2}. \quad (13)$$

Значение дискриминанта $a^2 + l^2 - r^2$ определяет положение исходного пункта A (начала координат) относительно окружности:

вне ее (можем провести две касательные к окружности с направляющими тангенсами k_1 и k_2):

$$\text{при } a^2 + l^2 > r^2, \quad (14a)$$

на окружности (одна касательная к окружности с k_1 , равным k_2):

$$\text{при } a^2 + l^2 = r^2, \quad (14б)$$

внутри окружности (касательная не существует):

$$\text{при } a^2 + l^2 < r^2. \quad (14в)$$

В нашем случае имеем для первой касательной $k_1 = 0,65$, для случая, близкого к предельному, $k_{II} = 2/3$.

Т а б л и ц а 2

Результаты вычислений числовых характеристик точности засечки

№ строки	Величины	Единицы измерения и их обозначения	Для P_1 (ближе к А)				Для P_2 (дальше от А)			
			$k_0 = 3/2$	$k_p' = 1$	$k_p'' = 3/4$	$k_{II} = 2/3$	$k = 3,2$	$k_p' = 1$	$k_p'' = 3/4$	$k_{II} = 2/3$
1	m_r	bm_β	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707
2	m_l	bm_β	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3	m_k	m_β	3,250	2,000	1,562	1,444	3,250	2,000	1,562	1,444
4	\sqrt{u}	b	-1,275	-0,866	-0,443	-0,167	1,275	0,866	0,443	0,167
5	X_p	b	0,608	0,817	1,061	1,270	1,392	1,683	1,660	1,500
6	Y_p	b	0,912	0,817	0,795	0,847	2,088	1,683	1,245	1,000
7	$\frac{\partial x}{\partial r}$	—	-0,556	-0,817	-1,514	-4,245	0,556	0,817	1,514	4,245
8	$\frac{\partial x}{\partial l}$	—	0,462	0,789	1,509	3,923	0,462	0,211	0,549	3,000
9	$\frac{\partial x}{\partial k}$	b	-0,280	-0,644	-1,598	-4,980	-0,642	-0,356	+0,910	+4,500
10	M_x^2	$b^2 m_\beta^2$	1,2	2,6	9,6	76,1	4,7	0,9	3,4	60,2
11	M_y^2	$b^2 m_\beta^2$	1,2	1,1	2,0	19,5	2,7	7,4	14,2	50,2
12	$M_s^2 =$ $= M_x^2 +$ $+ M_y^2$	$b^2 m_\beta^2$	2,4	3,7	11,6	95,6	7,4	8,3	17,6	110,4
13	M_s	$b m$	1,6	1,9	3,4	9,8	2,7	2,9	4,2	10,5
14	$\frac{M_2}{M_1}$	—	1,7	1,5	1,24	1,07				
15	θ	$0^\circ, 0$	90	61,7	31,8	11,3	-90	-61,7	-31,8	-11,3
16	M_s^*	m	3,5	4,2	7,5	21,5	5,9	6,4	9,2	23,1
17	M_s^{**}	m	0,8	0,9	1,7	4,8	1,3	1,4	2,0	5,1
18	M_s^{***}	m	1,2	1,4	2,5	7,2	2,0	2,1	3,1	7,7

* Для $b = 10000$ м и $m_\beta = 45^\circ$.

** Для $b = 10000$ м и $m_\beta = 10^\circ$.

*** Для $b = 15000$ м и $m_\beta = 10^\circ$.

Промежуточные и окончательные результаты вычислений средних квадратических ошибок координат точки P помещены в табл. 2. Данные табл. 2 вполне конкретно говорят о точности определения планового положения точки с помощью указанного вида засечки. Она зависит, как и следовало ожидать, от линейных габаритов засечки (длин базисов и засекающих направлений) и от угла засечки Θ в точке пересечения двух линий положения, образованного касательными к этим линиям. Заметим, что в способе решения задачи, приведенном нами в [2], определяется угол γ между линией \overline{AP} и радиусом OP , следовательно, угол засечки $\Theta = 90^\circ - \gamma$.

В упомянутой работе указывалось, что положение определяемой точки P вблизи P_0 (точки касания прямой \overline{AP} и окружности) является опасным с точки зрения выбора одного из двух математических решений в качестве геодезического; это же подчеркивает и О. К. Некрасов. Данные табл. 2 позволяют убедиться, что такое положение является опасным прежде всего потому, что вследствие неизбежных ошибок измеренных углов α и β точность определения точки P резко снижается вблизи точки P_0 , причем это имеет место тогда, когда расстояние между точками P_1 и P_2 остается еще достаточно большим. Так, в вычисленном нами случае для $k_{\text{п}} = 2/3$ (табл. 2) ошибка определения точки P в сравнении с «рядовым» пересечением возросла в пять раз для ближней точки P_1 и более 2,5 раза для дальней точки P_2 , при расстоянии между точками P_1 и P_2 , равном $0,28b$. Конкретно для принятых нами параметров задачи M_s превышает 23 м при расстоянии между точками P_1 и P_2 порядка 3 км. Таким образом, барьер точности в данной задаче наступает раньше возможной неопределенности выбора одного из математических решений в качестве решения геодезической задачи; он является более вероятным, а следовательно, и решающим для обоснования опасного положения определяемой точки.

Зависимость точности определения точки P от угла засечки Θ , образованного линиями положения (окружность, прямая), наглядно вытекает из сопоставления соответствующих значений M_s и Θ в табл. 2.

Значения Θ вычислены по формулам (15) из табл. 1, вывод которых дается ниже. Направляющий тангенс касательной к окружности в точке P получаем, продифференцировав уравнение окружности (4)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x-a}{y-l},$$

а угол Θ между касательной и прямой \overline{AP} (с направляющим коэффициентом k) определяем из отношения:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{k - \frac{\partial y}{\partial x}}{1 + k \frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{k + \frac{x-a}{y-l}}{1 - k \frac{x-a}{y-l}}.$$

Случай, когда $y=l$, рассмотрим особо*, а здесь продолжаем:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{k(y-l) + x-a}{y-l - k(x-a)}.$$

С учетом формул (5) получаем для точки P_1 и P_2 соответственно:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = -\frac{\sqrt{u}}{ak-l}; \quad \operatorname{tg} \Theta_2 = \frac{\sqrt{u}}{ak-l}. \quad (15)$$

* Если исключить случай, когда $r=0$, то ординату $y=l$ имеют две точки окружности, в которых касательные к ней параллельны оси y . Тогда $\operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{k}$.

Полагая $k = \operatorname{tg} \alpha$, можем продолжить преобразование формул (15) с учетом формулы (6):

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{r^2(1+k^2) - (ak-l)^2}{(ak-l)^2} = \frac{r^2(1+k^2)}{(ak-l)^2} - 1;$$

$$\cos \theta = \sin \gamma = \pm \frac{a \sin \alpha - l \cos \alpha}{r}. \quad (16)$$

Последняя формула выражает непосредственно зависимость между углами θ и α . Таким образом:

1. Измеренный на определяемой точке угол β является углом засечки при определении положения центра окружности относительно базиса BC в треугольнике COD или (для контроля вычислений) в треугольнике DOB . Следовательно, к углу β относятся общие требования к углам засечки: $30^\circ < \beta < 150^\circ$. При данном базисе радиус окружности увеличивается с уменьшением угла β , а с ним удлиняются засекающие направления, в результате чего, в свою очередь, увеличивается ошибка положения точки P . Минимальный радиус получается при $\beta = 90^\circ$.

2. Схематический чертеж засечки, отображающий конкретную ситуацию данной геодезической задачи, не только обуславливает правильный выбор одного из двух математических решений засечки, но и позволяет судить о ее точности по удалению определяемой точки от исходного пункта A . При всех прочих равных условиях ближняя точка P_1 всегда получается точнее дальней P_2 (см. в табл. 2 строку 14).

3. Точность засечки в большой степени зависит от угла θ между двумя линиями положения, поэтому получение величины угла θ или его дополнения до 90° по ходу решения задачи весьма желательно.

4. Как показывают данные табл. 2, угол $\theta = 90^\circ$ является оптимальным, а при θ , близком к нулю, ошибка определения точки резко увеличивается, однако даже при $\theta = 11^\circ$ точность засечки во многих случаях может еще быть удовлетворительной, а расстояние между точками P_1, P_2 остается еще достаточно большим, порядка $1/3 b$. Поэтому критическая минимальная величина θ будет колебаться в зависимости от других факторов (длин линии в засечке, точности измерения углов m_β , требуемой точности определения положения точки P) в пределах $12^\circ - 20^\circ$.

5. Соблюдение указанного требования к углу θ автоматически избавляет нас от трудности выбора одного из двух математических решений в качестве решения конкретной геодезической задачи, так как расстояние между точками, соответствующими этим решениям (P_1, P_2), не будет меньше $1/3 b$.

6. Пользуясь данными табл. 2 (строки 16, 17, 18), можно приблизительно оценить предельную ошибку M_s планового положения точки P в каждой конкретной задаче, что достаточно почти для всех случаев производственной практики. В исключительных случаях можно вычислить ошибку M_s с любой требуемой точностью, пользуясь формулами табл. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буткевич А. В. О вычислении координат «смешанных» засечек (задача Лакруа). «Геодезия и картография», № 7, 1966.
2. Вильнер Д. Г. О комбинированной засечке без сплошных направлений. «Геодезия и картография», № 10, 1968.
3. Некрасов С. К. О точности смешанной засечки. Изв. вузов, геодезия и аэрофотосъемка, вып. 2, 1968.