предназначенные для аналогичных целей [3]. С помощью ВАУ можно фотографировать при экспозиции в 1 мин звездоподобные объекты до 16^m, а обладающие заметной угловой скоростью относительно звезд не менее 12^m.

Графики проницающей силы (см. рисунок) позволяют более уверенно выбирать режимы работы камеры и обтюратора при наблюдениях. Но, используя их, необходимо учитывать, что они дают яркость объектов, едва различимых на снимках, а для надежных измерений пригодны объекты более яркие, примерно на $0^m,5$. Например, для фотографирования при хорошей прозрачности атмосферы небесного объекта с яркостью $9^m,5$ и угловой скоростью $\gamma=4000''/с$, находящегося на высоте $h=25°$, поступаем следующим образом. Учитывая указанную выше поправку $0^m,5$, а также потерю блеска $0^m,7$, принимаем, что яркость наблюдаемого объекта будет $10^m,7$ (рисунок, точка A). Как видно из рисунка, наблюдения надо выполнять в I режиме работы ВАУ при положении обтюратора «медленно». Рисунок показывает, что для фотографирования ярких объектов не всегда можно применять II режим. Так, для объекта, имеющего яркость $5^m,0$ и $\gamma=5000''/с$ в аналогичных предыдущему примеру условиях (точка B) получаем, что наблюдения надо выполнять в I режиме при положении обтюратора «быстро». В режиме II в этом случае изобразятся звезды величиной только до $5^m,7$, т. е. на снимке может оказаться недостаточное число подходящих для обработки опорных звезд.

Список литературы: 1. *Альбицкий В. А.* [и др.]. Курс астрофизики и звездной астрономии, т. 1. М.—Л. Гостехиздат, 1951. 2. *Вокулер Ж., Тестеро Ж.* Фотографирование небесных тел. М., «Наука», 1967. 3. *Масевич А. Г., Лозинский А. М.* Фотографические наблюдения ИСЗ. — «Науч. информации Астросовета АН СССР», № 18.

Работа поступила 10 мая 1977 г. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.

УДК 528.3.528.23

А. В. БУТКЕВИЧ, д-р техн. наук, *Е. Н. НОВИКОВА*
Львовский политехнический институт

КОНФОРМНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДА НА ШАРЕ С ДВУМЯ НОРМАЛЬНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЯМИ

Общие формулы конформного изображения эллипсоида на шаре по К. Гауссу имеют вид [4]:

$$\lambda = \alpha L; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{k}\operatorname{tg}^\alpha\left(45^0 + \frac{B}{2}\right)\left(\frac{1 - e\sin B}{1 + e\sin B}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} = \frac{U^\alpha}{k}. \tag{2}$$

Три постоянных проекции — долготную (α), широтную (k) и радиус шара (R) он определял, исходя из требования максимальной близости к единице линейного масштаба, выражаемого рядом

$$n = m = m_0 + \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_0 (\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2}\right)_0 \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} + \\ + \left(\frac{d^3 m}{d\varphi^3}\right)_0 \frac{(\varphi - \varphi_0)^3}{6} + \ldots, \qquad (3)$$

где m_0 — масштаб на нормальной параллели с широтой φ_0.

В 1822 г., принимая $\alpha = 1$, Гаусс получил свою I проекцию с искажениями второго порядка малости, в которой [4]:

$$m_0 = 1; \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_0 = 0; \quad (4) \qquad \varphi_0 = B_0; \ \lambda = L; \ R = N_0, \qquad (5)$$

а в 1844 г. — II конформную проекцию с искажениями длин третьего порядка, в которой [4]:

$$m_0 = 1; \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_0 = 0; \left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2}\right)_0 = 0; \qquad (6)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 B_0}; \ \sin \varphi_0 = \frac{\sin B_0}{\alpha}; \ R = \sqrt{M_0 N_0}. \qquad (7)$$

Дальнейшее уменьшение поправок длин линий и азимутов (азимуты α на шаре не совпадают с азимутами A на эллипсоиде, потому что геодезические линии эллипсоида не изображаются в проекции Гаусса на шаре дугами больших кругов) было связано с оптимальным выбором нормальной параллели. К. Гаусс принимал для Германии $\varphi_0 = 52°40'$. А. Беррот в 1922 г. и П. А. Ходорович в 1938 г. [5] применили для решения прямой геодезической задачи на основе проекции Гаусса «свободный» выбор нормальной параллели и приняли $B_0 = B_1$. При выборе в качестве нормальной широты — средней $B_0 = B_m$ (что удобно при решении обратной геодезической задачи) искажения длин будут четвертого порядка [4].

В математической картографии для уменьшения искажений успешно применяют цилиндрические и конические проекции эллипсоида с двумя нормальными параллелями при различных вариантах их выбора. Для изображения эллипсоида на шаре такой принцип впервые применил в 1971 г. Л. М. Бугаевский [3], но получил (для целей картографии) проекцию, в которой меридианы и параллели эллипсоида не изображаются меридианами и параллелями шара.

В 1971 г. А. В. Буткевич предложил применять изображение эллипсоида на шаре с двумя нормальными параллелями для решения обратных геодезических задач. В 1974 г. он с аспирантом Н. Н. Яковиничем [2] поставил цель разработать, исходя из принципов I и II проекций Гаусса, равнопромежуточное изображение эллипсоида на касательном шаре при различном выборе его радиуса $R_0(N_1, N_2, N_m, R_1, R_2, R_m)$. Наилучшие варианты были получены, как и в работе [1] для проекций Гаусса, для проекции I при $R_0=N_m$, а для проекции II при $R_0=R_m=\sqrt{M_m N_m}$, где $B_m=\frac{1}{2}(B_1+B_2)$ (см. таблицу).

Поправки «сферических» азимутов и расстояний

Проекция	Радиус шара	ψ_1	ψ_2	δS, м
Первая Гаусса	N_1	$-0{,}16''$	$+0{,}35''$	$-0{,}5$
Первая Гаусса	N_m	$+0{,}03$	$+0{,}03$	$0{,}0$
Первая равнопромежуточная	N_1	$+4{,}20$	$-4{,}70$	$-8{,}3$
»	N_2	$-4{,}28$	$+4{,}77$	$+9{,}0$
»	N_m	$-0{,}08$	$-0{,}08$	$+0{,}4$
Конформная I с двумя нормальными параллелями	(23)	$+0{,}045$	$+0{,}056$	$+0{,}2$
Вторая Гаусса	R_1	$+0{,}010$	$+0{,}029$	$0{,}0$
Вторая Гаусса	R_m	$+0{,}005$	$-0{,}005$	$0{,}0$
Вторая равнопромежуточная	R_1	$+0{,}27$	$+0{,}30$	$+0{,}5$
»	R_2	$+0{,}22$	$+0{,}35$	$+0{,}6$
»	R_m	$+0{,}11$	$+0{,}12$	$+0{,}2$
Конформная II с двумя нормальными параллелями	(23)	$+0{,}001$	$+0{,}007$	$0{,}0$

При этом они принимали $n_0^{(1)}=1$, а для выполнения условия $n_0^{(2)}=1$ вычисляли сферическую широту φ по формулам:

$$\text{в I проекции } \cos\varphi_{1;2}=\frac{\cos B_{1;2}\, N_{1;2}}{N_m}; \tag{8}$$

$$\text{во II проекции } \cos\varphi_{1;2}=\frac{\cos B_{1;2}\, N_{1;2}}{R_m\,\alpha_m}. \tag{9}$$

Проекция получалась равнопромежуточной по параллелям со средним масштабом по меридиану

$$m_m=\left(\frac{\sin B}{\sin\varphi}\right)_m. \tag{10}$$

Она весьма близка к конформной и авторы назвали ее «квазиконформной».

В работе [2] получена и равнопромежуточная проекция с двумя нормальными параллелями (при $\alpha=1$) на шаре с радиусом $R=N_m=\frac{1}{2}(N_1+N_2)$, секущем эллипсоид по параллелям с широтами B_1 и B_2.

Однако, как показал второй из авторов данной статьи, можно получить и строго конформные проекции эллипсоида на шаре с двумя нормальными параллелями, используя три условия:

$$m_0^{(1)} = n_0^{(1)} = \frac{R\cos\varphi_1\alpha}{r_1} = 1; \quad (11) \qquad n_0^{(2)} = \frac{R\cos\varphi_2\alpha}{r_2} = 1; \quad (12)$$

$$\left(\frac{dn}{d\varphi}\right)_0 = 0, \qquad (13)*$$

где $r_i = N_i \cos B_i$.

По аналогии с проекциями Гаусса будем говорить о I и II проекциях с двумя нормальными параллелями, в которых $\alpha = 1$ и $\alpha \neq 1$.

Для определения величин k и α во II проекции следует выразить $\cos\varphi$ через $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$ следующим образом:

$$\cos\varphi = \sin(90^0 + \varphi) = 2\sin\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)}, \qquad (14)$$

или на основании формулы (2)

$$\cos\varphi = \frac{\frac{2U^\alpha}{k}}{1 + \frac{U^{2\alpha}}{k^2}} = \frac{2U^\alpha k}{k^2 + U^{2\alpha}}. \qquad (15)$$

После подстановки $\cos\varphi$ из равенства (15) в формулы (11) и (12) получим

$$\frac{U_1^\alpha}{r_1(k^2 + U_1^{2\alpha})} = \frac{U_2^\alpha}{r_2(k^2 + U^{2\alpha})}, \qquad (16)$$

а затем два уравнения для определения k и α:

$$k^2 = \frac{U_2^\alpha U_1^{2\alpha} r_1 - U_1^\alpha U_2^{2\alpha} r_2}{U_1^\alpha r_2 - U_2^\alpha r_1} = \frac{U_2^\alpha U_1^\alpha (U_1^\alpha r_1 - U_2^\alpha r_2)}{U_1^\alpha r_3 - U_2^\alpha r_1}; \qquad (17)$$

$$\left(\frac{dn}{d\varphi}\right)_0 = 0, \qquad (18)$$

или $\alpha\sin\varphi_0 = \sin B_0$, или $\alpha(k^2 - U_0^{2\alpha}) = (k^2 + U_0^{2\alpha})\sin B_0$, (19)

где $B_0 = B_1$ или $B_0 = B_2$.

---

* Для одной из нормальных параллелей.

Для решения уравнений (17) и (19) можно применить разложение U^{α} в ряд Тейлора по степеням малой разности $(\alpha-1)$ до членов $(\alpha-1)^2$, после чего получим квадратное уравнение относительно $(\alpha-1)$

$$a(\alpha-1)+b(\alpha-1)^2=c, \tag{20}$$

которое удобно решать методом приближений, полагая в первом приближении $\alpha-1\cong\dfrac{c}{a}$.

Чтобы получить I проекцию, не будем использовать условие (13), а поставим вместо него требование $\alpha=1$. Тогда задача упрощается и

$$k^2=\frac{U_2U_1(U_1r_1-U_2r_2)}{U_1r_2-U_2r_1}. \tag{21}$$

Затем после вычисления широт φ_1 и φ_2 по формуле (2) можно дважды определить радиус шара:

$$\text{а) для I проекции } R=\frac{r_1}{\cos\varphi_0^{(1)}}=\frac{r_2}{\cos\varphi_0^{(2)}}; \tag{22}$$

$$\text{б) для II проекции } R=\frac{r_1}{\cos\varphi_0^{(1)}\alpha}=\frac{r_2}{\cos\varphi_0^{(2)}\alpha}. \tag{23}$$

Так, при $B_0^{(1)}=B_1=50°40'$ и $B_0^{(2)}=B_2=53°10'$ для I проекции (при $\alpha=1$) было получено: $\lg k=9{,}99\,770\,936$, $\varphi_1=50°40'11''$, 807, $\varphi_2=53°09'48''$, 799, $\lg R=6{,}80\,560\,280$ и ошибка в длине дуги меридиана $\delta X=X-X'=+0{,}2$ м. Для I проекции Гаусса при $\alpha=1$ получаем: $\lg k=9{,}99\,770\,876$, $\varphi_1=50°40'11''$, 986, $\varphi_2=53°09'48''$, 966, $\lg R=6{,}80\,560\,956$, $\delta X=+0{,}1$ м.

III проекцию получим, если вместо условия (13) поставить требование $k=1$. Тогда для определения α служит уравнение

$$r_2U_1^{\alpha}(1+U_2^{2\alpha})=r_1U_2^{\alpha}(1+U_1^{2\alpha}). \tag{24}$$

Чтобы сравнить поправки азимутов и расстояний в различных проекциях, были решены обратные геодезические задачи при $S=391$ км ($B_1=50°40'$, $B_2=53°10'$, $\Delta L=4°00'$) в двенадцати вариантах. Расхождения азимутов $\psi_1=A_{12}-\alpha_{12}$ и $\psi_2=A_{21}-\alpha_{21}$ и расстояний $\delta S=S-S'$ получены путем сравнения «сферических» азимутов и расстояний α_{12}, α_{21}, S' с геодезическими, полученными из точного решения обратной задачи на эллипсоиде в работе [1]. Результаты сравнения приведены в таблице.

Таким образом, вторым автором получена конформная проекция эллипсоида на шаре с двумя нормальными параллелями, в котором редукциями азимутов и расстояний можно пренебрегать при решении обратных задач и расчете стадиметрических сеток в морской геодезии и навигации при расстояниях до 300—400 км, проводя нормальные параллели через две базисные станции. Для решения задач на ЭВМ составлена программа.

Если учесть теорему Чебышева («наилучшей проекцией эллипсоида на плоскости является та, в которой масштаб на границе области постоянный»), то полученная конформная проекция с двумя нормальными параллелями будет наилучшей для изображения области эллипсоида на шаре (сфероидического пояса).

Список литературы: 1. *Буткевич А. В.* Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. М., «Недра», 1964. 2. *Буткевич А. В., Яковинич Н. Н.* Об изображении эллипсоида на шаре с двумя нормальными параллелями. — «Доклады и научные сообщения ЛПИ», вып. 8. Львов, 1977. 3. *Бугаевский Л. М.* Автореф. диссерт. на соиск. уч. степени докт. техн. наук. М., МИИГАиК, 1971. 4. *Красовский Ф. Н.* Руководство по высшей геодезии, ч. 2. М., Геодезиздат, 1942. 5. *Ходорович П. А.* Решение основной задачи высшей геодезии методом свободного выбора нормальной параллели. Омск. Изд-во ОМСХИ, 1938.

Работа поступила 30 мая 1977 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.

УДК 528.35

В. А. ВИЛЕНСКИЙ
Львовский политехнический институт

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЦЕПИ ТРИЛАТЕРАЦИИ ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Положим, что в цепях трилатерации из геодезических четырехугольников (прямоугольников, ромбов), изображенных на рисунке, измеряли поперечные стороны фигур a_i, диагонали фигур c_i и d_i и по сокращенной программе метода «во всех комбинациях» [1] звенья диагоналей $0n$ и $0'n'$ ряда, т. е. стороны b_{0i} и b'_{0i}, $i=\overline{1, n}$, где n — число фигур в ряде. Таким образом, кроме исходной, измерено $5n$ сторон. Пункты по верхней и нижней диагоналям ряда пронумерованы слева направо, начиная с нуля. Поэтому номер точки i равен числу фигур, отделяющих точку от края сети.

Необходимо оценить продольный и поперечный сдвиги конечного пункта n цепи трилатерации и погрешность дирекционного угла стороны a_n. Среднюю квадратическую ошибку m_D измерения расстояний при свето- и радиодальномерных измерениях вычисляем по формуле

$$m_D = c + kD\cdot 10^{-m}. \qquad (1)$$