

гать при решении обратных задач и расчете стадиметрических сеток в морской геодезии и навигации при расстояниях до 300—400 км, проводя нормальные параллели через две базисные станции. Для решения задач на ЭВМ составлена программа.

Если учесть теорему Чебышева («наилучшей проекцией эллипсоида на плоскости является та, в которой масштаб на границе области постоянный»), то полученная конформная проекция с двумя нормальными параллелями будет наилучшей для изображения области эллипсоида на шаре (сфероидического пояса).

Список литературы: 1. Буткевич А. В. Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. М., «Недра», 1964. 2. Буткевич А. В., Яковинич Н. Н. Об изображении эллипсоида на шаре с двумя нормальными параллелями. — «Доклады и научные сообщения ЛПИ», вып. 8. Львов, 1977. 3. Бугаевский Л. М. Автореф. диссерт. на соиск. уч. степени докт. техн. наук. М., МИИГАиК, 1971. 4. Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии, ч. 2. М., Геодезиздат, 1942. 5. Ходорович П. А. Решение основной задачи высшей геодезии методом свободного выбора нормальной параллели. Омск. Изд-во ОмСХИ, 1938.

Работа поступила 30 мая 1977 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.

УДК 528.35

В. А. ВИЛЕНСКИЙ

Львовский политехнический институт

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЦЕПИ ТРИЛАТЕРАЦИИ ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Положим, что в цепях трилатерации из геодезических четырехугольников (прямоугольников, ромбов), изображенных на рисунке, измеряли поперечные стороны фигур a_i , диагонали фигур c_i и d_i и по сокращенной программе метода «во всех комбинациях» [1] звенья диагоналей $0n$ и $0'n'$ ряда, т. е. стороны b_{0i} и b'_{0i} , $i=1, n$, где n — число фигур в ряду. Таким образом, кроме исходной, измерено $5n$ сторон. Пункты по верхней и нижней диагоналям ряда пронумерованы слева направо, начиная с нуля. Поэтому номер точки i равен числу фигур, отделяющих точку от края сети.

Необходимо оценить продольный и поперечный сдвиги конечного пункта n цепи трилатерации и погрешность дирекционного угла стороны a_n . Среднюю квадратическую ошибку m_D измерения расстояний при свето- и радиодальномерных измерениях вычисляем по формуле

$$m_D = c + kD \cdot 10^{-m}. \quad (1)$$

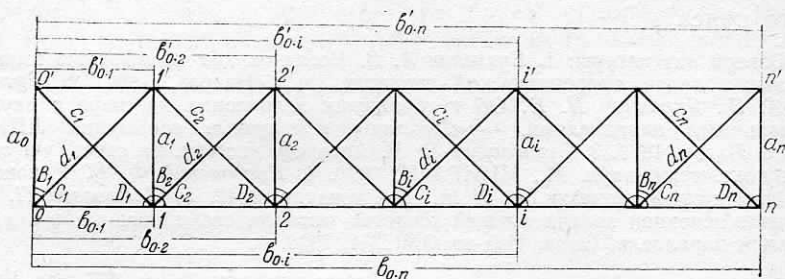
Здесь c — постоянное слагаемое ошибки; k — коэффициент; D — измеряемое расстояние. Если член $k \cdot 10^{-m}$ в формуле (1) в два-три раза меньше требуемой относительной ошибки в длине стороны, то получим формулу

$$m_D = c, \quad (2)$$

т. е. измерения можно считать равноточными.

Число условных уравнений в сети R

$$R = 5n - 2 \cdot 2n = n. \quad (3)$$



Цепь трилатерации из геодезических четырехугольников.

Обратный вес функции уравненных величин вычисляем по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \sum_{i=1}^n \frac{[r_i f \cdot (i-1)]^2}{[r_i r_i \cdot (i-1)]}, \quad (4)$$

где f — частные производные весовой функции; $[ff]$ — квадратический член весовой функции; r — вектор коэффициентов i -го условного уравнения; n — число условных уравнений, равное числу фигур в ряду.

Системы условных уравнений соответственно для цепи из геодезических прямоугольников и ромбов имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l}(a)_i + \frac{1}{l}(a)_{i+1} + (b')_i - (b')_{i-1} + (b)_i - (b)_{i-1} - \\ - \frac{\sqrt{1+l^2}}{l}(c)_i - \frac{\sqrt{1+l^2}}{l}(d)_i + W_i = 0; \end{aligned} \quad (5)^*$$

$$\begin{aligned} (a)_i + (a)_{i+1} + (b')_i - (b')_{i-1} + (b)_i - (b)_{i-1} - \\ - 2 \sin \beta (c)_i - 2 \cos \beta \cdot (d)_i + W_i = 0, \end{aligned} \quad (5')$$

где $(a)_i$, $(b)_i$, $(b')_i$, $(c)_i$, $(d)_i$ — поправки в стороны a_i , b_i , b'_i , c_i , d_i ; W_i — свободный член i -го условного уравнения; $l = \frac{b}{a}$ —

* Здесь и далее для краткости записи первый индекс в сторонах $b'_{0,i}$ и $b_{0,i}$ опущен. При $i=0$ поправки в стороны $(b)_{i-1}$ и $(b')_{i-1}$ в условных уравнениях (5) и (5') следует опустить.

продвиг фигуры в цепи из геодезических прямоугольников; β — значение угла B_i в цепи из геодезических ромбов; a и b — длины сторон a_i и $b_{i+(i+1)}$.

Системам условных уравнений (5) и (5') соответствует система нормальных уравнений с трехдиагональной матрицей упрощенного типа

$$N = \begin{pmatrix} T-2 & H & & & \\ & H & T & H & \\ & & H & T & H \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & H & T & H \\ & & & & H & T \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где для цепи из прямоугольников

$$T = \frac{4(1+l^2)}{l^2} + 2; \quad H = \frac{1}{l^2} - 2, \quad (7)$$

а для цепи из ромбов

$$T = 10; \quad H = -1. \quad (7')$$

Для исследуемых цепей выражения весовых функций оцениваемых элементов ряда имеют весьма простой вид. Так, весовая функция продольного сдвига конечного пункта n ряда

$$F_l = b_n. \quad (8)$$

Для поперечного сдвига того же пункта

$$F_u = -b_n \cdot \cos \alpha, \quad (9)$$

где α — дирекционный угол направления диагонали $b_{0,n}$ и, согласно рисунку,

$$\alpha = \alpha_0 + C_1. \quad (10)$$

Дифференцируя формулу (9) и переходя к поправкам в стороны при $\alpha = 90^\circ$, получаем

$$dF_u = -b_n(C)_1 = n \cdot \left[\frac{1}{l} \cdot (a)_1 + (b)_1 - \frac{\sqrt{1+l^2}}{l} \cdot (c)_1 \right]; \quad (11)$$

$$dF_u = -b_n(C)_1 = n \cdot [\operatorname{tg} \beta \cdot (a)_1 + \operatorname{tg} \beta \cdot (b)_1 + \operatorname{sec} \beta \cdot (c)_1]. \quad (11')$$

Весовая функция для дирекционного угла стороны a_n выглядит так:

$$F_a = \alpha_n = \alpha_0 + C_1 + 180^\circ + D_n, \quad (12)$$

или

$$dF_a = d\alpha_n = (C)_1 + (D)_n. \quad (13)$$

Переходя к поправкам в стороны соответственно для цепочек из прямоугольников и ромбов, будем иметь

$$dF_\alpha = \frac{\rho}{a} \cdot \left[\frac{\sqrt{1+L^2}}{L^2} (c)_1 - \frac{1}{l} (a)_1 - (b)_1 + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1+L^2}}{l} (d)_n - \frac{1}{l} (a)_{n+1} - (b)_n + (b)_{n+1} \right]; \quad (14)$$

$$dF_\alpha = \frac{\rho}{a} \cdot [\sec \beta (c)_1 - \operatorname{tg} \beta (a)_1 - \operatorname{tg} \beta (b)_1 - \operatorname{cosec} \beta (d)_n - \\ - \operatorname{ctg} \beta (a)_{n+1} - \operatorname{ctg} \beta (b)_n + \operatorname{ctg} \beta (b)_{n-1}]. \quad (14')$$

Квадратические члены в формуле (4) определим из равенства:

$$[f_t f_t] = 1, [f_u f_u] = \frac{2n^2(1+L^2)}{l^2}, [f_\alpha f_\alpha] = \frac{\rho^2}{a^2} \left[\frac{4(1+L^2)}{l^2} + 1 \right]; \quad (15)$$

$$[f_t f_t] = 1, [f_u f_u] = 2n^2 \operatorname{tg}^2 \beta + n^2 \operatorname{sec}^2 \beta;$$

$$[f_\alpha f_\alpha] = \frac{\rho^2}{a^2} [2 \operatorname{tg}^2 \beta + 3 \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{sec}^2 \beta + \operatorname{cosec}^2 \beta]. \quad (15')$$

В результате перемножения матрицы коэффициентов системы условных уравнений (5) и (5') на векторы-столбцы коэффициентов частных производных весовых функций получим векторы нормальных коэффициентов весовых функций:

$$N_t = \| 00 \dots 01 \|, N_u = \left\| \frac{2n(1+L^2)}{l^2} (-n) 0 \dots 0 \right\|,$$

$$N_\alpha = \frac{\rho}{a} \left\| -\frac{2(1+L^2)}{l^2} 1 0 \dots 0 1 - \frac{3(1+L^2)+1}{l^2} \right\|, \quad (16)$$

$$N_t = \| 00 \dots 01 \|, N_u = \| 4n \operatorname{tg} \beta (-n) \operatorname{tg} \beta 0 \dots 0 \|,$$

$$N_\alpha = \frac{\rho}{a} \| -4 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta 0 \dots 0 \operatorname{ctg} \beta - 5 \operatorname{ctg} \beta \|. \quad (16')$$

Определим теперь преобразованные квадратические коэффициенты нормальных уравнений. Для этого каждый из них развернем по алгоритму Гаусса. Отбросим нулевые слагаемые, получим

$$[r_i r_i \cdot (i-1)]_{i=1}^n = [r_i r_i] - \frac{[r_{i-1} r_i \cdot (i-2)]^2}{[r_{i-1} r_{i-1} (i-2)]}, \quad (17)$$

где $[r_{i-1} r_i \cdot (i-2)]_{i=2}^n = [r_{i-1} r_i] = H. \quad (18)$

Члены последовательности преобразованных квадратических коэффициентов нормальных уравнений в формуле (17) образуются по закону цепной дроби, предел которой определим из уравнения

$$X = T - \frac{H^2}{X}. \quad (19)$$

Было установлено, что с ошибкой $< 1\%$ можно принимать $X \cong T$.

Преобразованные квадратические коэффициенты весовых функций определим из равенства

$$[r_i f(i-1)]_{i=1}^n = [r_i f] - \frac{[r_{i-1} r_i (i-2)][r_{i-1} f(i-2)]}{[r_{i-1} r_{i-1} (i-2)]}. \quad (20)$$

Если обозначить

$$Y = - \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{[r_{i-1} r_i (i-2)]}{[r_{i-1} r_{i-1} (i-2)]} = - \frac{H}{X}, \quad (21)$$

то формула (20) примет вид

$$[r_i f(i-1)]_{i=2}^n = [r_i f] + Y [r_{i-1} f(i-2)]. \quad (22)$$

Вычисленные по формуле (17) и (21) преобразованные квадратические коэффициенты приведены в таблице. Подставляя последние в формулу (4) и пренебрегая членами порядка 0,001, получаем искомые формулы для прямоугольников:

$$\frac{1}{P_t} = 1 - \frac{1}{X} = 1 - \frac{l^2}{4 + 6l^2}; \quad \frac{1}{P_u} = - \frac{n^2(1+l^2)}{l^2} - \frac{n^2}{40l^6}; \quad (23)$$

$$\frac{1}{P_a} \left(\frac{2,5l^2 + 2}{l^2} - \frac{1 + 4l^6 - 4l^3}{4l^4(4 + 6l^2)} \right) \cdot \rho^2;$$

и для ромбов:

$$\frac{1}{P_t} = 1 - \frac{1}{X} = 0,900; \quad \frac{1}{P_u} = n^2 \sec^2 \beta - 0,025 n^2 \operatorname{tg}^2 \beta;$$

$$\frac{1}{P_a} = (4 \operatorname{cosec}^2 2\beta + 0,5 \operatorname{ctg}^2 \beta - 0,025 \operatorname{tg}^2 \beta) \cdot \frac{\rho^2}{a^2}, \quad (23')$$

которые при $n \geq 4$ будут практически строгими.

Сравнивая полученные формулы (23) и (23') с аналогичными, приведенными в работе [3] для линейных рядов из геодезических четырехугольников, видим, что в исследуемых сетях точность передачи координат пунктов и дирекционных углов сторон выше. Поэтому цепи исследуемого вида нужно применять в том случае, когда измеряемые линии находятся в

Преобразованные квадратические коэффициенты нормальных уравнений и преобразованные неквадратические коэффициенты весовых функций

t	Цель из геодезических прямоугольников					Цель из геодезических ромбов				
	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$	$[r_t^t \cdot t^{(t-1)}]$
1	$T-2$	0	$\frac{2n(1+t^2)}{l^2}$	$-\frac{2(1+t^2)q}{l^2}$	8	0	$4n \operatorname{tg} \beta$	$-4 \operatorname{tg} \beta q$		
2	T	0	$-n \cdot z$	$z \cdot q$	10	0	$-10^{-1} \cdot n \cdot t$	$10^{-1} \cdot t \cdot q$		
3	T	0	$-Y \cdot n \cdot z$	$Y \cdot z \cdot q$	10	0	$-10^{-2} \cdot n \cdot t$	$10^{-2} \cdot t \cdot q$		
4	T	0	$-Y^2 \cdot n \cdot z$	$Y^2 \cdot z \cdot q$	10	0	$-10^{-3} \cdot n \cdot t$	$10^{-3} \cdot t \cdot q$		
...
$n-2$	T	0	$-Y^{n-4} \cdot n \cdot z$	$Y^{n-4} \cdot n \cdot q$	10	0	$-10^{-(n-3)} \cdot n \cdot t$	$10^{-(n-3)} \cdot t \cdot q$		
$n-1$	T	0	$-Y^{n-3} \cdot n \cdot z$		10	0	$-10^{-(n-2)} \cdot n \cdot t$	$\operatorname{ctg} \beta \cdot q$		
n	T	1	$-Y^{n-2} \cdot n \cdot z$	$\left(\frac{-3-2l^2}{l^2} + Y \right) \cdot q$	10	1	$-10^{-(n-1)} \cdot n \cdot t$	$-4.9 \operatorname{ctg} \beta \cdot q$		

Примечание. $z = \frac{1}{2l^2}$, $t = 5 \operatorname{tg} \beta$, $q = \frac{\rho}{a}$.

створе и влиянием длины измеряемой линии на точность ее измерения можно пренебречь. По нашему мнению, такие цепи могут найти применение в инженерной практике.

Список литературы: 1. *Бронштейн Г. С.* Измерение расстояний во всех комбинациях. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1970, вып. 4. 2. *Виленский В. А.* Исследование зависимости ошибок линий, измеренных свето- и радиодальномерами, от длин линий. — «Доклады и научные сообщения Львовского политехнического института», 1975, № 4. 3. *Кутузов И. А.* Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1957, вып. 2.

Работа поступила 1 июня 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.

УДК 528.3

Б. М. ДЖУМАН, канд. техн. наук
Львовский политехнический институт

РЕДУЦИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕННЫХ ЗЕНИТНЫХ РАССТОЯНИЙ НА ПЕРИОДЫ СПОКОЙНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНЫМ КОЛЕБАНИЯМ ИЗОБРАЖЕНИЙ ВИЗИРНЫХ ЦЕЛЕЙ

Высокая точность тригонометрического нивелирования может быть достигнута при измерении зенитных расстояний в периоды спокойных изображений, т. е. при нейтральной термической стратификации в приземном слое воздуха [1]. Однако эти периоды, особенно в равнинных районах, где лучи визирования проходят низко над подстилающей поверхностью, могут быть незначительны. Это, естественно, сужает возможности применения данного метода.

Чтобы расширить продолжительность наблюдений в периоды спокойных изображений путем введения редукций в зенитные расстояния с использованием измеренных амплитуд колебаний изображений визирных целей в вертикальной плоскости, в августе 1973 г. на геодезическом полигоне Львовского политехнического института были выполнены экспериментальные наблюдения.

На пункте Б измеряли зенитные расстояния инструментом ОТ-02М с переносного штатива, температуру на двух высотах, скорость ветра, давление и максимальные амплитуды вертикальных колебаний изображений.

Температуру измеряли психрометром Асмана на высотах 1,5 и 5,0 м над подстилающей поверхностью, а давление и скорость ветра соответственно анероидом и ручным анемометром