

В. А. ВИЛЕНСКИЙ

Львовский политехнический институт

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЦЕПИ ТРИЛАТЕРАЦИИ ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Положим, что в цепях трилатерации из геодезических четырехугольников (прямоугольников, ромбов), изображенных на рисунке, измеряли поперечные стороны фигур a_i , диагонали фигур c_i и d_i и по сокращенной программе метода «во всех комбинациях» [1] звенья диагоналей $0n$ и $0'n'$ ряда, т. е. стороны b_{0i} и b'_{0i} , $i=1, n$, где n — число фигур в ряду. Таким образом, кроме исходной, измерено $5n$ сторон. Пункты по верхней и нижней диагоналям ряда пронумерованы слева направо, начиная с нуля. Поэтому номер точки i равен числу фигур, отделяющих точку от края сети.

Необходимо оценить продольный и поперечный сдвиги конечного пункта n цепи трилатерации и погрешность дирекционного угла стороны a_n . Среднюю квадратическую ошибку m_D измерения расстояний при свето- и радиодальномерных измерениях вычисляем по формуле

$$m_D = c + kD \cdot 10^{-m}. \quad (1)$$

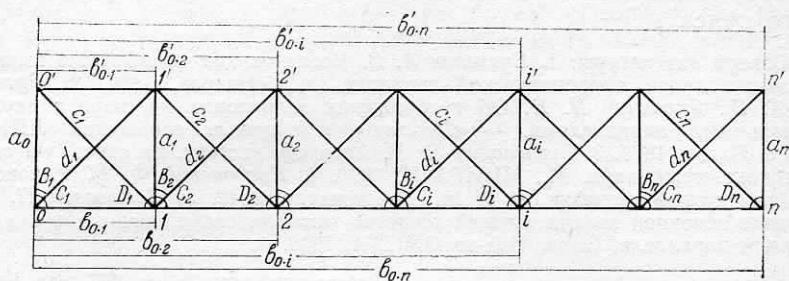
Здесь c — постоянное слагаемое ошибки; k — коэффициент; D — измеряемое расстояние. Если член $k \cdot 10^{-m}$ в формуле (1) в два-три раза меньше требуемой относительной ошибки в длине стороны, то получим формулу

$$m_D = c, \quad (2)$$

т. е. измерения можно считать равноточными.

Число условных уравнений в сети R

$$R = 5n - 2 \cdot 2n = n. \quad (3)$$



Цепь трилатерации из геодезических четырехугольников.

Обратный вес функции уравненных величин вычисляем по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \sum_{i=1}^n \frac{[r_i f \cdot (i-1)]^2}{[r_i r_i \cdot (i-1)]}, \quad (4)$$

где f — частные производные весовой функции; $[ff]$ — квадратический член весовой функции; r — вектор коэффициентов i -го условного уравнения; n — число условных уравнений, равное числу фигур в ряде.

Системы условных уравнений соответственно для цепи из геодезических прямоугольников и ромбов имеют вид:

$$\frac{1}{l}(a)_i + \frac{1}{l}(a)_{i+1} + (b')_i - (b')_{i-1} + (b)_i - (b)_{i-1} - \frac{\sqrt{1+l^2}}{l}(c)_i - \frac{\sqrt{1+l^2}}{l}(d)_i + W_i = 0; \quad (5)^*$$

$$(a)_i + (a)_{i+1} + (b')_i - (b')_{i-1} + (b)_i - (b)_{i-1} - 2 \sin \beta (c)_i - 2 \cos \beta \cdot (d)_i + W_i = 0, \quad (5')$$

где $(a)_i$, $(b)_i$, $(b')_i$, $(c)_i$, $(d)_i$ — поправки в стороны a_i , b_i , b'_i , c_i , d_i ; W_i — свободный член i -го условного уравнения; $l = \frac{b}{a}$

* Здесь и далее для краткости записи первый индекс в сторонах $b'_{0,i}$ и $b_{0,i}$ опущен. При $i=0$ поправки в стороны $(b)_{i-1}$ и $(b)_{i-1}$ в условных уравнениях (5) и (5') следует опустить.

продвиг фигуры в цепи из геодезических прямоугольников; β — значение угла B_i в цепи из геодезических ромбов; a и b — длины сторон a_i и $b_{i,(i+1)}$.

Системам условных уравнений (5) и (5') соответствует система нормальных уравнений с трехдиагональной матрицей упрощенного типа

$$N = \left\| \begin{array}{cccc} T - 2 & H & & \\ H & T & H & \\ & H & T & H \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & H & T & H \\ & & & H & T \end{array} \right\|, \quad (6)$$

где для цепи из прямоугольников

$$T = \frac{4(1+l^2)}{l^2} + 2; \quad H = \frac{1}{l^2} - 2, \quad (7)$$

а для цепи из ромбов

$$T = 10; \quad H = -1. \quad (7')$$

Для исследуемых цепей выражения весовых функций оцениваемых элементов ряда имеют весьма простой вид. Так, весовая функция продольного сдвига конечного пункта n ряда

$$F_t = b_n. \quad (8)$$

Для поперечного сдвига того же пункта

$$F_u = -b_n \cdot \cos \alpha, \quad (9)$$

где α — дирекционный угол направления диагонали $b_{0,n}$ и, согласно рисунку,

$$\alpha = \alpha_0 + C_1. \quad (10)$$

Дифференцируя формулу (9) и переходя к поправкам в стороны при $\alpha = 90^\circ$, получаем

$$dF_u = -b_n(C)_1 = n \cdot \left[\frac{1}{l} \cdot (a)_1 + (b)_1 - \frac{\sqrt{1+l^2}}{l} \cdot (c)_1 \right]; \quad (11)$$

$$dF_u = -b_n(C)_1 = n \cdot [\operatorname{tg} \beta \cdot (a)_1 + \operatorname{tg} \beta \cdot (b)_1 + \sec \beta \cdot (c)_1]. \quad (11')$$

Весовая функция для дирекционного угла стороны a_n выглядит так:

$$F_a = \alpha_n = \alpha_0 + C_1 + 180^\circ + D_n, \quad (12)$$

или

$$dF_a = d\alpha_n = (C)_1 + (D)_n. \quad (13)$$

Переходя к поправкам в стороны соответственно для цепочек из прямоугольников и ромбов, будем иметь

$$dF_a = \frac{\rho}{a} \cdot \left[\frac{\sqrt{1+l^2}}{l^2} (c)_1 - \frac{1}{l} (a)_1 - (b)_1 + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1+l^2}}{l} (d)_n - \frac{1}{l} (a)_{n+1} - (b)_n + (b)_{n+1} \right]; \quad (14)$$

$$dF_a = \frac{\rho}{a} \cdot [\sec \beta (c)_1 - \operatorname{tg} \beta (a)_1 - \operatorname{tg} \beta (b)_1 - \operatorname{cosec} \beta (d)_n - \\ - \operatorname{ctg} \beta (a)_{n+1} - \operatorname{ctg} \beta (b)_n + \operatorname{ctg} \beta (b)_{n-1}]. \quad (14')$$

Квадратические члены в формуле (4) определим из равенства:

$$[f_t f_t] = 1, [f_u f_u] = \frac{2n^2(1+l^2)}{l^2}, [f_a f_a] = \frac{\rho^2}{a^2} \left[\frac{4(1+l^2)}{l^2} + 1 \right]; \quad (15)$$

$$[f_t f_t] = 1, [f_u f_u] = 2n^2 \operatorname{tg}^2 \beta + n^2 \sec^2 \beta;$$

$$[f_a f_a] = \frac{\rho^2}{a^2} [2 \operatorname{tg}^2 \beta + 3 \operatorname{ctg}^2 \beta + \sec^2 \beta + \operatorname{cosec}^2 \beta]. \quad (15')$$

В результате перемножения матрицы коэффициентов системы условных уравнений (5) и (5') на векторы-столбцы коэффициентов частных производных весовых функций получим векторы нормальных коэффициентов весовых функций:

$$N_t = \|00 \dots 01\|, N_u = \left\| \frac{2n(1+l^2)}{l^2} (-n) 0 \dots 0 \right\|,$$

$$N_a = \frac{\rho}{a} \left\| -\frac{2(1+l^2)}{l^2} 1 0 \dots 0 1 - \frac{3(1+l^2)+1}{l^2} \right\|, \quad (16)$$

$$N_t = \|00 \dots 01\|, N_u = \|4n \operatorname{tg} \beta (-n) \operatorname{tg} \beta 0 \dots 0\|,$$

$$N_a = \frac{\rho}{a} \| -4 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta 0 \dots 0 \operatorname{ctg} \beta - 5 \operatorname{ctg} \beta \| . \quad (16')$$

Определим теперь преобразованные квадратические коэффициенты нормальных уравнений. Для этого каждый из них развернем по алгоритму Гаусса. Отбросив нулевые слагаемые, получим

$$[r_i r_i \cdot (i-1)]_{i-1}^n = [r_i r_i] - \frac{[r_{i-1} r_i \cdot (i-2)]^2}{[r_{i-1} r_{i-1} (i-2)]}, \quad (17)$$

$$\text{где} \quad [r_{i-1} r_i \cdot (i-2)]_{i-2}^n = [r_{i-1} r_i] = H. \quad (18)$$

Члены последовательности преобразованных квадратических коэффициентов нормальных уравнений в формуле (17) образуются по закону цепной дроби, предел которой определим из уравнения

$$X = T - \frac{H^2}{X}. \quad (19)$$

Было установлено, что с ошибкой $< 1\%$ можно принимать $X \cong T$.

Преобразованные квадратические коэффициенты весовых функций определим из равенства

$$[r_i f(i-1)]_{i=1}^n = [r_i f] - \frac{[r_{i-1} r_i (i-2)][r_{i-1} f(i-2)]}{[r_{i-1} r_{i-1} (i-2)]}. \quad (20)$$

Если обозначить

$$Y = - \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{[r_{i-1} r_i (i-2)]}{[r_{i-1} r_{i-1} (i-2)]} = - \frac{H}{X}, \quad (21)$$

то формула (20) примет вид

$$[r_i f(i-1)]_{i=2}^n = [r_i f] + Y [r_{i-1} f(i-2)]. \quad (22)$$

Вычисленные по формуле (17) и (21) преобразованные квадратические коэффициенты приведены в таблице. Подставляя последние в формулу (4) и пренебрегая членами порядка 0,001, получаем искомые формулы для прямоугольников:

$$\frac{1}{P_t} = 1 - \frac{1}{X} = 1 - \frac{l^2}{4 + 6l^2}; \quad \frac{1}{P_u} = - \frac{n^2(1+l^2)}{l^2} - \frac{n^2}{40l^6}; \quad (23)$$

$$\frac{1}{P_a} \left(\frac{2,5'l^2 + 2}{l^2} - \frac{1 + 4l^6 - 4l^3}{4l^4(4 + 6l^2)} \right) \cdot \frac{\rho^2}{Q^2};$$

и для ромбов:

$$\frac{1}{P_t} = 1 - \frac{1}{X} = 0,900; \quad \frac{1}{P_u} = n^2 \sec^2 \beta - 0,025 n^2 \operatorname{tg}^2 \beta;$$

$$\frac{1}{P_a} = (4 \operatorname{cosec}^2 2\beta + 0,5 \operatorname{ctg}^2 \beta - 0,025 \operatorname{tg}^2 \beta) \cdot \frac{\rho^2}{a^2}, \quad (23')$$

которые при $n \geq 4$ будут практически строгими.

Сравнивая полученные формулы (23) и (23') с аналогичными, приведенными в работе [3] для линейных рядов из геодезических четырехугольников, видим, что в исследуемых сетях точность передачи координат пунктов и дирекционных углов сторон выше. Поэтому цепи исследуемого вида нужно применять в том случае, когда измеряемые линии находятся в

Преобразованные квадратические коэффициенты нормальных уравнений и преобразованные неквадратические коэффициенты весовых функций

t	Цепь из геодезических прямоугольников				Цепь из геодезических ромбов			
	$[r_i^t(t-1)]$	$[r_i^t(t-1)]$	$[r_i^u(t-1)]$	$[r_i^a(t-1)]$	$[r_i^t(t-1)]$	$[r_i^u(t-1)]$	$[r_i^a(t-1)]$	$[r_i^a(t-1)]$
1	$T-2$	0	$\frac{2n(1+l^2)}{l^2}$	$-\frac{2(1+l^2)q}{l^2}$	8	0	$4n \operatorname{tg} \beta$	$-4 \operatorname{tg} \beta q$
2	T	0	$-n \cdot z$	$z \cdot q$	10	0	$-10^{-1} \cdot n \cdot t$	$10^{-1} \cdot t \cdot q$
3	T	0	$-Y \cdot n \cdot z$	$Y \cdot z \cdot q$	10	0	$-10^{-2} \cdot n \cdot t$	$10^{-2} \cdot t \cdot q$
4	T	0	$-Y^2 \cdot n \cdot z$	$Y^2 \cdot z \cdot q$	10	0	$-10^{-3} \cdot n \cdot t$	$10^{-3} \cdot t \cdot q$
...
$n-2$	T	0	$-Y^{n-4} \cdot n \cdot z$	$Y^{n-4} \cdot n \cdot q$	10	0	$-10^{-(n-3)} \cdot n \cdot t$	$10^{-(n-3)} \cdot t \cdot q$
$n-1$	T	0	$-Y^{n-3} \cdot n \cdot z$		10	0	$-10^{-(n-2)} \cdot n \cdot t$	$\operatorname{ctg} \beta \cdot q$
n	T	1	$-Y^{n-2} \cdot n \cdot z$	$\left(\frac{-3-2l^2}{l^2} + Y \right) \cdot q$	10	1	$-10^{-(n-1)} \cdot n \cdot t$	$-4,9 \operatorname{ctg} \beta \cdot q$

Примечание. $z = \frac{1}{2l^2}$, $t = 5 \operatorname{tg} \beta$, $q = \frac{\rho}{a}$.

створе и влиянием длины измеряемой линии на точность ее измерения можно пренебречь. По нашему мнению, такие цепи могут найти применение в инженерной практике.

Список литературы: 1. *Бронштейн Г. С.* Измерение расстояний во всех комбинациях. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1970, вып. 4. 2. *Виленский В. А.* Исследование зависимости ошибок линий, измеренных свето- и радиодальномерами, от длин линий. — «Доклады и научные сообщения Львовского политехнического института», 1975, № 4. 3. *Кутузов И. А.* Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1957, вып. 2.

Работа поступила 1 июня 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.