УДК 528.27:551.1

Р. Р. ИЛЬКИВ
Львовский политехнический институт

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ОТ ВЫСОТЫ ПО ГЕОПОТЕНЦИАЛУ

На заданной уровенной поверхности геопотенциал не зависит от положения точки на этой поверхности, т. е. от широты и долготы. Следовательно, его можно использовать для определения зависимости силы тяжести от высоты. В своих исследованиях мы исходили из теоретических положений, изложенных в работе [2].

Определение зависимости измеренной силы тяжести от высоты выполнено по материалам нивелирно-гравиметрических ходов, проложенных в горном районе Карпат.

Вертикальный градиент силы тяжести $\frac{dg}{dn}$ получаем путем разложения потенциала силы тяжести в ряд Тейлора

$$W_0 = W + gH + \frac{1}{2}\frac{dg}{dn}H^2 + \frac{1}{6}\frac{d^2g}{dn^2}H^3 + \cdots, \tag{1}$$

где W_0 — потенциал силы тяжести на уровне моря; W — потенциал силы тяжести в исследуемой точке; H — высота точки наблюдения над уровнем моря; g, $\frac{dg}{dn}$, $\frac{d^2g}{dn^2}$ — сила тяжести и ее производные по направлению отвесной линии.

В работе [1] выполнено вычисление первой производной силы тяжести по направлению отвесной линии $\frac{dg}{dn}$, причем третий член разложения, т. е. $\frac{1}{6}\frac{d^2g}{dn^2}H^3$, не учитывался, поскольку предполагалось, что его можно отбросить из-за малой величины. Действительно, как будет показано далее, значение второй производной силы тяжести $\frac{d^2g}{dn^2}$ очень мало. Однако если ее умножить на 1/3 H, то получим при больших высотах достаточно значительную величину.

Запишем формулу (1) в таком виде:

$$W_0 - W = gH + \frac{1}{2}\frac{dg}{dn}H^2 + \frac{1}{6}\frac{d^2g}{dn^2}H^3 + \cdots. \tag{1'}$$

Левая часть равенства (1′) представляет разность потенциалов силы тяжести, или геопотенциал, и может быть записана следующим образом [2]:

$$\frac{1}{H}\sum\frac{g_i + g_{i+1}}{2}\Delta h_i = g + \frac{1}{2}\frac{dg}{dn}H + \frac{1}{6}\frac{d^2g}{dn^2}H^2 + \cdots, \tag{2}$$

где g_i и g_{i+1} — измеренные значения силы тяжести в двух близких точках; Δh_i — превышение между этими точками.

Заменим g_i+g_{i+1} на $g_0+\Delta G_i+g_0+\Delta G_{i+i}$. Здесь ΔG_i и ΔG_{i+1} — приращения силы тяжести от исходной точки.

Запишем выражение (2) для фиксированной точки A так:

$$\frac{1}{h_A}\sum\left(g_0+\frac{\Delta G_i+\Delta G_{i+1}}{2}\right)\Delta h_i = g_A+\frac{1}{2}\frac{dg}{dn}h_A+\frac{1}{6}\frac{d^2 g}{dn^2}h_A^2. \quad (2')$$

В этом случае: $g_A=g_0+\Delta G_A$; $\Sigma\Delta h_i=h_A$.

Учитывая эту замену, выражение (2′) можно записать в такой форме:

$$g_0+\frac{1}{h_A}\sum\frac{\Delta G_i+\Delta G_{i+1}}{2}\Delta h_i = g_0+\Delta G_A+\frac{1}{2}\frac{dg}{dn}h_A+\frac{1}{6}\frac{d^2 g}{dn^2}h_A^2. \quad (3)$$

Сократив значение силы тяжести в исходной точке g_0, получим:

$$\frac{1}{h_A}\sum\frac{\Delta G_i+\Delta G_{i+1}}{2}\Delta h_i-\Delta G_A=\frac{1}{2}\frac{dg}{dn}h_A+\frac{1}{6}\frac{d^2 g}{dn^2}h_A^2. \quad (4)$$

Разделив выражение (4) на h_A и умножив на 2, получим

$$\frac{1}{h_A^2}\sum(\Delta G_i+\Delta G_{i+1})\Delta h_i-\frac{2\Delta G_A}{h_A}=\frac{dg}{dn}+\frac{1}{3}\frac{d^2 g}{dn^2}h_A. \quad (5)$$

или

$$\frac{1}{h_A}\left[\frac{1}{h_A}\sum_{i=1}^{i=A}(\Delta G_i+\Delta G_{i+1})\Delta h_i-2\Delta G_A\right]=\frac{dg}{dn}+\frac{1}{3}h_A\frac{d^2 g}{dn^2}. \quad (6)$$

Таким образом, имеем уравнение с двумя неизвестными $\frac{dg}{dn}$ и $\frac{d^2 g}{dn^2}$, в котором величины h_A, ΔG_i, ΔG_{i+1}, ΔG_A и Δh_i известны из измерений.

Выражение (6) запишем как уравнение вида $ax+by+l=\delta$

$$\frac{dg}{dn}+\frac{1}{3}h_A\frac{d^2 g}{dn^2}-\frac{1}{h_A}\left[\frac{1}{h_A}\sum_{i=1}^{i=A}(\Delta G_i+\Delta G_{i+1})\Delta h_i-2\Delta G_A\right]=\delta. \quad (7)$$

По материалам проложения нивелирно-гравиметрических ходов в горном районе Карпат нами получены данные для вычисления $\frac{dg}{dn}$ и $\frac{d^2 g}{dn^2}$. В работе [1] описаны результаты вычисления значений $\frac{dg}{dn}$. В настоящей работе $\frac{dg}{dn}$ и $\frac{d^2 g}{dn^2}$ вычислены совместно. Составлены выражения вида (7) и из решения трех групп уравнений параметрическим способом по трем отдельным нивелирно-гравиметрическим ходам определены вероятнейшие значения $\frac{dg}{dn}$ и $\frac{d^2 g}{dn^2}$ (таблица).

Таким образом, вторая производная силы тяжести по направлению отвесной линии $\frac{d^2 g}{dn^2}$ очень мала, но умноженная на $\frac{1}{3} H$ (см. формулу (7)) при больших высотах она является значительной величиной.

Вероятнейшие значения $\frac{dg}{dn}$, $\frac{d^2 g}{dn^2}$ и средние квадратические ошибки их определения

Номер нивелирно-гравиметрического хода	$x=\frac{dg}{dn}$	$y=\frac{d^2g}{dn^2}$	m_x	m_y
1	+0,2138	+0,0000394	±0,0022	±0,0000082
2	+0,2043	+0,0000933	±0,0029	±0,0000501
3	+0,1971	+0,0000275	±0,0021	±0,0000223

Можно предположить, что разные значения $\frac{d^2 g}{dn^2}$ отражают различное геологическое строение в местах, где проложены нивелирно-гравиметрические ходы.

Список литературы: 1. *Илькив Р. Р.* Опыт определения вертикального градиента силы тяжести по измеренному геопотенциалу. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1972, вып. 15. 2. *Мигаль Н. К.* Несколько слов об основных проблемах теории фигуры Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1965, вып. 3.

Работа поступила 27 апреля 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.