УДК 528.16:528.65.335.2

В. В. КОТОВ

УПРОЩЕННЫЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПРИ РАЗДЕЛЬНОМ ИХ УРАВНОВЕШИВАНИИ

Определение средних квадратических ошибок уравненных элементов в геодезических сетях связано, как известно, с определением весов этих элементов. Наиболее точные значения весов находятся по способу наименьших квадратов путем решения нормальных уравнений, возникающих в данной сети, совместно с весовыми функциями оцениваемых элементов [1]. Однако этот способ требует больших затрат труда, которые иногда превышают затраты на уравнивание сетей [5, стр. 42—43].

Более просто поставленная задача решается в случае применения способа эквивалентной замены профессора А. С. Чеботарева. Однако последний целесообразен лишь в случае простых сетей. Применение его для оценки точности более сложных сетей — процесс весьма трудоемкий [10]. Довольно сложно производится оценка точности уравненных элементов и в случае применения метода полигонов или узлов профессора В. В. Попова [6].

Поэтому на практике наибольшее распространение при оценке точности раздельно уравновешиваемых геодезических сетей получил более простой способ последовательных приближений. Различные приемы его применения изложены в работах [2, 4, 7]. Весьма простая формула для оценки точности отдельных узловых точек предложена доцентом В. П. Козловым [8].

Однако способ последовательных приближений и способ В. П. Козлова также обладают существенным недостатком, который приводит к заметному преувеличению весов оцениваемых элементов. Ниже будет показано, что это преувеличение может достигать 80—90, а в отдельных случаях и более процентов.

В предлагаемой статье рассматривается упрощенный способ решения поставленной задачи, который в значительной мере устраняет отмеченные недостатки.

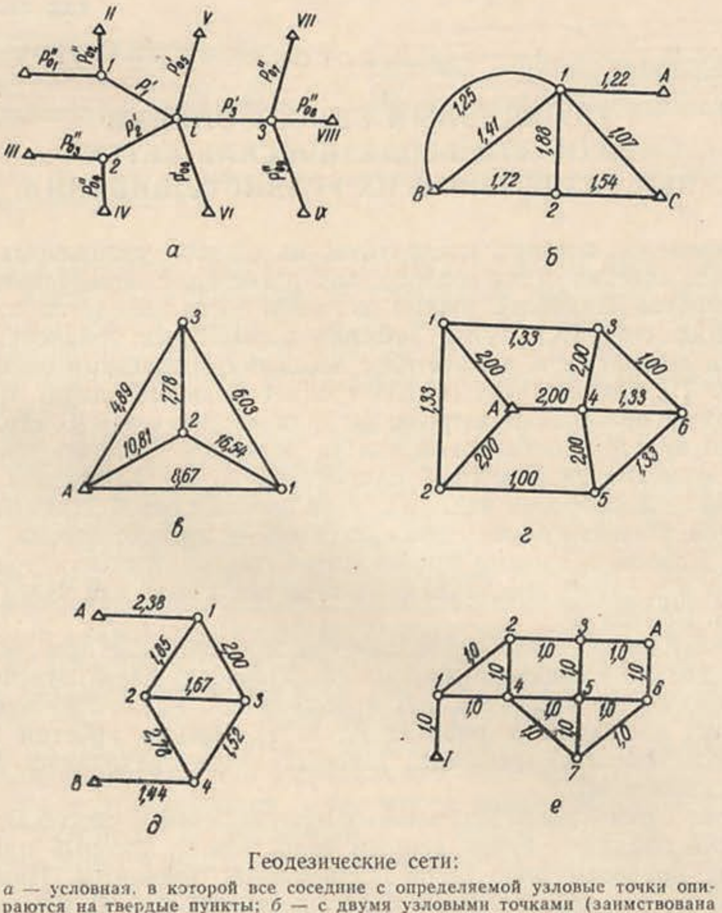
Данный способ применим для оценки точности любых узловых элементов раздельно уравновешиваемой геодезической сети, мы, однако, в целях более краткого изложения рассмотрим его только применительно к нивелирным сетям.

Предположим, что веса неуравновешенных превышений по отдельным ходам найдены и выписаны на схемах сетей (рисунок, *а*—*е*). Для ходов между узловыми точками условимся обозначать эти веса буквой p, а для ходов, примыкающих к твердым точкам, — буквой p_0.

Часть ходов, сходящихся в рассматриваемой узловой точке, может исходить из твердых пунктов, а часть — от узловых точек. Допустим, что все ходы, сходящиеся в соседних с определяемой узловых точках, исходят от твердых пунктов (см. рисунок, a). Тогда на основании способа эквивалентной замены вес для рассматриваемой узловой точки i находим по формуле

$$p = [p_0'] + \frac{p_1' \cdot [p_0'']_1}{p_1' + [p_0'']_1} + \frac{p_2' \cdot [p_0']_2}{p_2' + [p_0'']_2} + \cdots, \tag{1}$$

где $[p_0']$ — сумма весов по ходам, идущим от твердых точек на определяемую узловую точку; $[p_0'']$ — суммы весов по ходам, идущим от



Геодезические сети:

a — условная, в которой все соседние с определяемой узловые точки опираются на твердые пункты; $б$ — с двумя узловыми точками (заимствована из [8]); $в$ — с тремя узловыми точками (заимствована из [9]); $г$ — с шестью узловыми точками; $д$ — с четырьмя узловыми точками (заимствована из [1]); $е$ — с семью узловыми точками.

твердых точек на соседние с определяемой узловые точки; p' — веса превышений между определяемой и соседними с ней узловыми точками *.

Формулу (1) можно переписать в виде

$$p = [p_0'] + \frac{p_1'}{1 + \frac{p_1'}{[p_0'']_1}} + \frac{p_2'}{1 + \frac{p_2'}{[p_0'']_2}} + \cdots \tag{2}$$

* Если между определяемой и какой-либо соседней с ней узловой точкой будет не один, а несколько ходов, то и в соответствующий член формулы (1) вводится не один вес, а сумма весов всех этих ходов.

Выполненные нами исследования показали, что замена входящих в знаменатели правой части формулы (2) величин p_1', p_2' ... p_n' и $[p_0'']_1$, $[p_0'']_2 \ldots [p_0'']_n$ их средними значениями очень мало влияет на конечный результат. Поэтому с целью упрощения данной формулы принимаем

$$p_1' = p_2' = \cdots = p_n' = \frac{[p']}{n} = \frac{[p]_1}{n},$$

и

$$[p_0'']_1 = [p_0'']_2 = \cdots = [p_0'']_n = \frac{\Sigma [p_0'']}{n} = \frac{[p_0]_2}{n}. \tag{3}$$

Тогда формула (2) имеет вид

$$p = [p_0]_1 + \frac{p_1'}{1 + \dfrac{[p]_1}{[p_0]_2}} + \frac{p_2'}{1 + \dfrac{[p]_1}{[p_0]_2}} + \cdots,$$

или

$$p = [p_0]_1 + \frac{[p]_1}{1 + \dfrac{[p]_1}{[p_0]_2}}. \tag{4}$$

Формула (4) получена в предположении, что все ходы, сходящиеся в соседних с определяемой узловых точках, исходят из твердых пунктов. На самом деле ходы, сходящиеся в этих точках, могут исходить как из твердых, так и из узловых точек и т. д. Поэтому в общем виде формула (4) имеет вид

$$p = [p_0]_1 + \cfrac{[p]_1}{1 + \cfrac{[p]_1}{[p_0]_2 + \cfrac{[p]_2}{1 + \cfrac{[p]_2}{[p_0]_3 + \cdots}}}} \tag{5}$$

Индексы при суммах в формуле (5) указывают на порядок влияния неповторяющихся весов отдельных превышений, входящих в эти суммы, на вес определяемой узловой точки. В формулу (5) включаются без повторения веса всех ходов данной сети.

Таблица 1

Схема вычисления весов узловых точек

Пункты	Исходный вес от точек: твердых	Исходный вес от точек: узловых	Искомый вес
a	$[p_0]_1+$	$[p]_1$	p_a
		$[p]_1$	$+1$
$A_1', A_2', \ldots, a_1', a_2', \ldots$	$[p_0]_2+$	$[p]_2$	
		$[p]_2$	$+1$
$A_1'', A_2'', \ldots, a_1'', a_2'', \ldots$	$[p_0]_3+$	$[p]_3$	
		$[p]_3$	$+1$
$A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots$	$[p_0]_{n+1}+$	$[p]_{n+1}$	
		$[p]_{n+1}$	
		0.	

Вычисления по формуле (5) рекомендуется располагать так, как это сделано в табл. 1, где A', A'', A''' ... — твердые пункты, влияющие на определяемую узловую точку соответственно через 1, 2, 3 хода; a', a'', a''' ... — узловые точки, влияющие на определяемую точку соответственно через 1, 2, 3 ... хода; $[p_0]_1$, $[p_0]_2$, $[p_0]_3$ ... — суммы весов по ходам соответственно 1, 2, 3-го ... порядка по отношению к определяемой точке, примыкающим к твердым пунктам. $[p]_1$ $[p]_2$ $[p]_3$ ... — суммы весов по ходам соответственно 1, 2, 3-го ... порядка по отношению к определяемой точке, примыкающим к узловым точкам.

Таблица 2

Определение весов узловых точек для нивелирной сети
(рисунок, *д*)

Пункты	Исходный вес: от твердых пунктов	Исходный вес: от узловых пунктов	Искомый вес	Пункты	Исходный вес: от твердых пунктов	Исходный вес: от узловых точек	Искомый вес
1	2,36+	$\frac{3,85}{3,85}$	$\frac{3,27}{+1}$	3	0+	$\frac{5,19}{5,19}$	$\frac{2,20}{+1}$
А, 2, 3	0+	$\frac{5,97}{5,97}$	+1	1, 2, 4	3,82+	$\frac{4,63}{4,63}=0$	
4 *В*	1,44+	0		*А*, *В*		0	
2	0+	$\frac{6,30}{6,30}$	$\frac{2,37}{+1}$	4	1,44+	$\frac{4,30}{4,30}$	$\frac{2,61}{+1}$
1, 3, 4	3,82+	$\frac{3,52}{3,52}=0$		*В*, 2, 3	0+	$\frac{5,52}{5,52}$	+1
А, *В*		0		1 *А*	2,38+	0	

Последовательность заполнения табл. 1 легко проследить на примере оценки точности сети, изображенной на рисунке, *д*, табл. 2, и на примере оценки точности сети, приведенной в работе [3, стр. 144], (табл. 3).

Пункты и соответствующие им суммы весов $[p_0]$ и $[p]$ выписываются в табл. 1 непосредственно со схемы сети. Контролем нахождения этих сумм служит формула

$$\Sigma[p_0]+\Sigma[p]=Q, \tag{6}$$

где Q — сумма всех весов данной сети, подсчитываемая заранее по схеме сети.

Вычисления в табл. 1 ведутся снизу вверх при помощи логарифмической линейки.

Формула (5) испытана нами на большом числе нивелирных и полигонометрических сетей самых различных конструкций и везде получены результаты, весьма мало отличающиеся от найденных строгим способом (по методу [1]). Результаты оценки точности нивелирных сетей, изображенных на рисунке, *б—д*, приведены в табл. 4.

Из табл. 4 видно, что рассмотренный способ дает хорошие результаты независимо от конструкции сетей, в то время как на результаты, полученные способом последовательных приближений и способом В. П. Козлова, последние оказывают существенное влияние. Например, для сети, изображенной на рисунке, *б*, веса, найденные этими способами, практически совпадают с весами, найденными способом наименьших

* Сеть заимствована из работы [1].

квадратов. В то же время для сети, изображенной на рисунке, *г*, расхождения в соответствующих весах достигают 80—90%.

В отдельных случаях указанные расхождения могут быть большими. Так, веса точки *А* в сети, изображенной на рисунке, *е*, найденные по формуле В. П. Козлова и способом последовательных приближений, по сравнению с весами, найденными рассмотренным нами и строгим способом, увеличены более чем в 2,5 раза. Такое преувеличение считать нормальным уже нельзя.

Таблица 3

Определение веса узловой точки в сложной сети

Пункты	Исходный вес		Искомый вес
	от твердых пунктов	от узловых точек	
12	0+	4,9	1,35
		4,9	+1
7, 13, 17	0+	5,9	
		5,9	+1
1, 8, 14, 18	0+	7,2	
		7,2	+1
2, 9, 19	1,7+	5,3	
		5,3	+1
3, 0, 15, 20	4,2+	5,3	
		5,3	+1
4, 16, 21	0+	6,0	
		6,0	+1
5, 10, 11, 6 0	1,7+	4,6	
		4,6 =0	
		0	
Контроль	7,6+	39,2	=46,8

Описанным нами способом можно определять вес любой узловой точки в любой сети. В табл. 3 приведен пример определения веса 12-го пункта более сложной строительной сетки из работы [3, стр. 144]. Полученный вес, как и следовало ожидать, оказался значительно меньше, по сравнению с весом, найденным способом последовательных приближений.

Из табл. 3 видно также, что в сложных сетях связи выше четвертого порядка оказывают весьма малое влияние на вес определяемой узловой точки. Поэтому во многих случаях эти связи можно не учитывать и принимать узловые точки четвертого порядка по отношению к определяемой точке за твердые.

Формула (5) получена в предположении, что ошибки исходных данных отсутствуют. При наличии ошибок исходных данных веса ходов, примыкающих к твердым пунктам, находим по формуле

$$p_m = \frac{p_{\text{исх.}} \cdot p_0}{p_0 + p_{\text{исх}}}. \tag{7}$$

В этом случае суммы $[p_0]$ в формуле (5) заменяются соответствующими им суммами $[p_m]$. Совершенно очевидно, что при отсутствии ошибок исходных данных, когда $p_{\text{исх}}=\infty$, $p_m=p_0$ и $[p_m]=[p_0]$.

Как показали исследования, изложенный способ требует значительно меньших затрат труда по сравнению с известными способами последовательных приближений. Для несложных сетей (см. рисунок, *а—е*) применение формулы (5) оказывается даже проще приближенной формулы В. П. Козлова (табл. 2). Следует принять во внимание и то, что способ последовательных приближений и формула В. П. Козлова всегда приводят к существенному преувеличению весов, что особенно нежелательно.

Таблица 4

Оценка точности нивелирных сетей (рисунок, *б—д*)*

№ точек	Веса				№ точек	Веса			
	I	II	III	IV		I	II	III	IV
1А	6,1	6,1	6,1	6,3	1Б	17,9	17,9	21,5	23,0
2	4,6	4,6	4,6	4,7	2	19,5	19,5	23,1	25,6
					3	13,0	13,0	15,8	15,6
1В	3,4	3,5	3,8	3,9	1Г	3,2	3,3	4,9	5,0
2	3,3	3,4	3,7	3,8	2	2,2	2,4	4,0	4,2
3	2,2	2,4	3,1	3,2	3	2,1	2,2	3,7	3,7
4	3,5	3,5	5,0	5,4	4	2,5	2,6	4,1	4,2
5	2,1	2,4	3,1	3,1					
6	1,8	2,0	2,8	2,8					

* Обозначения: А, Б, В, Г—сети соответственно: *б* из [8]; *в* из [9], *г*, *д* из [1].
I, II, III, IV—способы, соответственно: строгий, рассматриваемый, В. П. Козлова, последовательных приближений.

Таким образом, можно сделать вывод, что рассмотренный способ оценки точности геодезических сетей является более простым по сравнению с известными приближенными способами, позволяет производить выборочную оценку точности узловых точек в сетях и дает результаты, достаточно близкие к результатам, получаемым способом наименьших квадратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурмистров Г. А. Оценка точности уравновешенных величин при составлении нормальных уравнений коррелат по чертежу сети полигонов. «Геодезия и картография», 1961, № 3.
2. Видуев Н. Г. Расчет точности строительной сетки. «Геодезия и картография», 1957, № 8.
3. Видуев Н. Г. и др. Основы геодезических разбивочных работ. Госстройиздат УССР, Киев, 1960.
4. Лебедев Н. Н. Особенности геодезических работ на городских территориях. Геодезиздат, М., 1958.
5. Литвинов Б. А. Основные вопросы построения и уравнивания полигонометрических сетей. Геодезиздат, М., 1962.
6. Попов В. В., Мартыненко Л. Ф. Оценка точности высот в нивелирной сети, уравновешенной методом полигонов и методом узлов. АН БССР, тр. Ин-та физики и математики, вып. 1, Минск, 1956.
7. Романсв Н. Г. Проектирование основных геодезических сетей в городах. «Геодезия и картография», 1959, № 12.
8. Селиханович В. Г. Задачник по геодезии. Геодезиздат, М., 1962.
9. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1936.
10. Шейн Д. Применение метода эквивалентной замены к расчету и уравновешиванию геодезических сетей произвольного вида. «Геодезист», 1939, № 4.

Работа поступила
19 ноября 1969 года.