нивелирно-гравиметрическим ходам определены вероятнейшие значения $\frac{dg}{dn}$ и $\frac{d^2 g}{dn^2}$ (таблица).

Таким образом, вторая производная силы тяжести по направлению отвесной линии $\frac{d^2 g}{dn^2}$ очень мала, но умноженная на $\frac{1}{3} H$ (см. формулу (7)) при больших высотах она является значительной величиной.

Вероятнейшие значения $\frac{dg}{dn}$, $\frac{d^2 g}{dn^2}$ и средние квадратические ошибки их определения

Номер нивелирно-гравиметрического хода	$x=\frac{dg}{dn}$	$y=\frac{d^2g}{dn^2}$	m_x	m_y
1	+0,2138	+0,0000394	±0,0022	±0,0000082
2	+0,2043	+0,0000933	±0,0029	±0,0000501
3	+0,1971	+0,0000275	±0,0021	±0,0000223

Можно предположить, что разные значения $\frac{d^2 g}{dn^2}$ отражают различное геологическое строение в местах, где проложены нивелирно-гравиметрические ходы.

Список литературы: 1. *Илькив Р. Р.* Опыт определения вертикального градиента силы тяжести по измеренному геопотенциалу. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1972, вып. 15. 2. *Мигаль Н. К.* Несколько слов об основных проблемах теории фигуры Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1965, вып. 3.

Работа поступила 27 апреля 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.

УДК 528.28

В. В. КИРИЧУК, канд. техн. наук, *Ф. Д. ЗАБЛОЦКИЙ*, канд. техн. наук
Львовский политехнический институт

АСТРОНОМИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ В АТМОСФЕРЕ ВЕНЕРЫ

Успехи в исследовании планет Солнечной системы, и в первую очередь Венеры и Марса, достигнутые благодаря применению автоматических межпланетных станций, позволяют решать целый ряд научных задач, в том числе задачу определения астрономических рефракций в атмосферах этих планет [2, 9]. Решение данной задачи обеспечивает относительно большой объем информации об атмосферах Венеры и Марса. Кроме того, в настоящее время определение астрономической рефракции становится актуальным вследствие возрастающей сложности и объема экспериментов, выполняемых в атмосферах и на поверхности этих планет новыми автоматическими станциями.

Астрономическую рефракцию можно рассчитать для произвольной атмосферы, зная:

а) строение атмосферы, т. е. среднюю температуру и парциальное давление всех газов, составляющих атмосферу, включая водяной пар, на любых высотах над поверхностью планеты;

б) состав атмосферы, т. е. процентное содержание каждого газа, входящего в атмосферу;

в) удельную рефракцию каждого газа, составляющего атмосферу.

Для расчета рефракции в атмосфере Венеры воспользуемся моделью ее атмосферы, построенной на основании исследований АМС * «Венера»-4, 5, 6, 7, 8 [3—6]. Обоснованность этой модели подтверждена исследованиями АМС «Венера»-9, 10 [1].

Модель атмосферы Венеры представлена в виде значений температуры, давления и плотности ее «воздуха» в интервале высот 6—1000 км относительно средней поверхности планеты (средний радиус 6050 км) [4].

Значения параметров атмосферы приведены через каждые 2 км до высоты 100 км, через 5 км — до 170 км, через 10 км — до 200 км, через 25 км — до 500 км, через 50 км — до 700 км и через 100 км — до 1000 км. В качестве наиболее достоверного участка авторы модели считали интервал высот 0—80 км. Поэтому в дальнейшем при практических вычислениях мы ограничимся участком модели атмосферы Венеры высотой до 100 км включительно.

Согласно той же модели [4], атмосфера Венеры состоит на 97% из углекислого газа, 2% азота и 1% водяного пара и других примесей. Однако поскольку содержание азота, водяного пара и других примесей определено в настоящее время с большими погрешностями [3], то условимся считать, что атмосфера Венеры состоит только из углекислого газа. Это позволит значительно упростить вычисление показателя преломления венерианского «воздуха». Так, известное уравнение Лоренц-Лорентца [7]

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\sum_i R_i \rho_i, \tag{1}$$

где R_i и ρ_i — удельная рефракция и парциальная плотность компоненты газовой смеси, приводим в этом случае к уравнению

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=R_{CO_2}\cdot\rho_{CO_2}. \tag{2}$$

* Автоматическая межпланетная станция.

Решим уравнение (2) относительно показателя преломле-ния n

$$n^2 = 1 + (n^2 + 2) \cdot R \cdot \rho^*, \tag{3}$$

или

$$n = [1 + (n^2 + 2) R \cdot \rho]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(n^2 + 2) R \cdot \rho -$$

$$- \frac{1}{8}[(n^2 + 2) R \cdot \rho]^2 + \frac{3}{48}[(n^2 + 2) R \cdot \rho]^3 - \cdots. \tag{4}$$

Обозначим последние три члена разложения (4) через I, II и III и выполним их оценку для нескольких уровней в атмосфере Венеры. Результаты этих вычислений приведены в табл. 1.

Таблица

Оценка влияния членов II и III на показатель преломления

H, км	n_H	ρ_H (г/см³)	R	II	III
0	1,016	$6{,}73 \times 10^{-2}$	0,153	$122{,}0 \times 10^{-6}$	$2{,}0 \times 10^{-6}$
10	1,009	$3{,}99 \times 10^{-2}$		$43{,}0 \times 10^{-6}$	$0{,}4 \times 10^{-6}$
20	1,005	$2{,}20 \times 10^{-2}$		$13{,}0 \times 10^{-6}$	$7{,}0 \times 10^{-8}$
35	1,002	$7{,}54 \times 10^{-3}$		$1{,}5 \times 10^{-6}$	$2{,}5 \times 10^{-9}$

Примечание. Методика расчета удельной рефракции R и показателя преломления n_H описана ниже.

Из табл. 1 видно, что при точных расчетах астрономической рефракции в атмосфере Венеры погрешность определения показателя преломления не должна превышать $\pm 1 \times 10^{-6}$. В формуле (4) в зависимости от высоты слоя необходимо удерживать: 1) при $H \leqslant 10$ км все члены разложения; 2) при 10 км $\leqslant H \leqslant 35$ км член I—II; 3) при $H > 35$ км член I.

Таким образом, в отличие от вычислений рефракции в земной атмосфере, где используется известное соотношение Дэла—Гладстона

$$n = 1 + c\rho, \tag{5}$$

обеспечивающее необходимую точность **, для атмосферы Венеры, в зависимости от высоты слоев воздуха, показатель преломления следует определять так:

а) для $H \leqslant 10$ км по формуле (4);

б) для 10 км $\leqslant H \leqslant 35$ км по формуле

$$n = 1 + \frac{1}{2}(n^2 + 2) R \cdot \rho - \frac{1}{8}[(n^2 + 2) R \cdot \rho]^2; \tag{6}$$

* Индекс CO_2 опущен, поскольку все расчеты выполняются для атмосферы, состоящей только из углекислого газа.

** В формуле (5) $c = \text{const}$ принято для всей атмосферы [8].

в) для $H > 35$ км по формуле

$$n = 1 + \frac{1}{2}(n^2 + 2)\,R \cdot \rho. \tag{7}$$

В формулы (4), (6), (7) входит удельная рефракция R. Получим ее значение для углекислого газа, исходя из следующих соображений.

Согласно дисперсионной формуле, для показателя преломления углекислого газа при нормальных условиях ($t_0 = 15{,}16°$ С и $P_0 = 1013{,}25$ мб) имеем [10]

$$(n_0 - 1) \times 10^8 = 22\,822{,}1 + 117{,}8\,\sigma^2 + \frac{2406030}{(130 - \sigma^2)} + \frac{15997}{(38{,}9 - \sigma^2)}, \tag{8}$$

где $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ — величина, обратно пропорциональная длине волны излучаемого света. Подставив в формулу (8) $\lambda = 0{,}550$ мк, что соответствует середине спектра видимого излучения, получим

$$n_0 = 1 + 42651{,}7 \times 10^{-8}. \tag{9}$$

Далее, из уравнения (2) для нормальных условий следует, что

$$R = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho_0}. \tag{10}$$

Плотность углекислого газа при нормальных условиях найдем по известному соотношению (11)

$$\rho_0 = 529{,}37 \cdot \frac{P_0}{T_0} = 1860{,}9 \text{ г/м}^3, \tag{11}$$

а затем по формуле (10) получим значение удельной рефракции углекислого газа $R = 0{,}152789$.

Значение удельной рефракции, как известно [7], характеризуется поляризуемостью среды и не зависит от давления и температуры. Следовательно, для данной среды (углекислого газа) найденное нами значение R является константой для всего возможного диапазона изменения плотности среды.

Поэтому запишем формулу (4) в следующем виде:

$$n = 1 + k\rho - k_1\rho^2 + k_2\rho^3, \tag{12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} k &= 1/2\,(n^2 + 2)\cdot R; \\ k_1 &= 1/8\,[\sqrt[2]{n^2} + 2)\cdot R]^2; \\ k_2 &= 3/48\,[(n^2 + 2)\cdot R]^3. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В дальнейшем для расчета показателя преломления будем пользоваться, учитывая также уравнения (7) и (13), формулой вида

$$n = 1 + k\rho. \tag{14}$$

Это оправдано как с точки зрения неполноты в данный мом... информации о строении и составе атмосферы Венеры, та... с точки зрения вносимых в вычисления рефракций погреш... стей за счет этих упрощений. Использование уравнения (... вместо (12) вносит по приближенной оценке погрешность в ... чение рефракции в горизонте примерно (—117″) при об... значении рефракции $\Theta \approx 5°$.

Таблиц...

Зависимость коэффициента k от высоты

H, км	0	10	20	30	40	50	60	70	8...
k	0,231590	0,230587	0,229956	0,229569	0,229389	0,229233	0,229200	0,229187	0,22...

Формула (14) внешне подобна уравнению Дэля-Гладст... (5), но в отличие от входящей в него константы c коэф... циент k в формуле (14) будет изменяться с высотой. Это об... няется тем, что для атмосферы Венеры (нижних ее слоев) ... личина $(n—1)$ на два порядка больше, чем для атмосф... Земли и, следовательно, для величины k нельзя использова... как в уравнении Дэля-Гладстона, приближенное равенство ... $={}^1/_2(n^2+2)\cdot R \approx 1{,}5\ R$.

Чтобы установить зависимость коэффициента k от выс... вычислим его значения для диапазона высот 0—100 км с ... мощью следующих соотношений:

$$n \cong 1 + 1{,}5\,R\cdot\rho;\quad k = \frac{1}{2}(n^2+2)\cdot R.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2. Из нее след... что зависимость коэффициента k от высоты необходимо учи... вать вплоть до уровня 80 км при точном вычислении реф... ции, т. е. при $\Delta n = \pm 1 \times 10^{-6}$, и лишь в более высоких сл... атмосферы можно полагать $k = 1{,}5\cdot R = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь вычисление астрономической рефрак... в атмосфере Венеры. Для этого представим с помощью урав... ния (14) известный интеграл рефракции [12]

$$\theta = \int\limits_{n_0}^{1} \frac{dn}{n} \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{n\,(a+H)}{n_0\,a}\right]^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 z} - 1}}$$

в виде

$$\theta = \int\limits_{\rho_0}^{\rho_{100\,\text{км}}} \frac{k\cdot\sin z}{(1+k\rho)^2}\cdot\frac{(1+k_0\rho_0)}{\left(1+\frac{H}{a}\right)}\cdot\left[1 - \frac{(1+k_0\rho_0)^2\sin^2 z}{(1+k\rho)^2\left(1+\frac{H}{a}\right)^2}\right]^{-1/2} d\rho.$$

Интеграл (16) будем вычислять численным методом; для этого участок модели атмосферы Венеры в диапазоне высот 0—100 м разобьем на 50 двухкилометровых слоев и представим интеграл (16) в виде суммы интегралов

$$\theta=\sum_{i=0}^{49}\int\limits_{0}^{2\,\text{км}}\frac{k_i\cdot\sin z}{(1+k_i\rho_i)^2}\cdot\frac{(1+k_0\,\rho_0)}{\left(1+\dfrac{H_{0i}+h}{a}\right)}\times$$

$$\times\left[1-\frac{(1+k_0\,\rho_0)^2\sin^2 z}{(1+k_i\rho_i)^2\cdot\left(1+\dfrac{H_{0i}+h}{a}\right)^2}\right]d\rho_i. \qquad (17)$$

В каждом из этих слоев будем использовать линейную зависимость плотности от высоты

$$\rho_i=\rho_{0i}+b_i\cdot h, \qquad (18)$$

где ρ_{0i} — плотность на нижней границе i-го слоя согласно модели атмосферы; b_i — коэффициент, предварительно рассчитываемый для каждого слоя по формуле

$$b_i=\frac{\rho_{0i+1}-\rho_{0i}}{2};$$

h — текущая высота внутри слоя.

Тогда с учетом уравнения (18) окончательно получим

$$\theta=\sum_{i=0}^{49}\int\limits_{0}^{2\,\text{км}}\frac{k_i b_i\sin z}{[1+k_i(\rho_{0i}+b_ih)]^2}\cdot\frac{(1+k_0\,\rho_{00})}{\left(1+\dfrac{H_{0i}+h}{a}\right)}\times$$

$$\times\left[1-\frac{(1+k_0\,\rho_{00})^2\sin^2 z}{[1+k_i\,(\rho_{0i}+b_ih)]^2\cdot\left[1+\dfrac{H_{0i}+h}{a}\right]^2}\right]^{-1/2}dh, \qquad (19)$$

где ρ_{00} — плотность «воздуха» у поверхности; k_0 — значение коэффициента k формулы (14) у поверхности; k_i — значение коэффициента k формулы (14) для середины i-го слоя, найденное по формулам (15); H_{0i} — высота нижней границы i-го слоя над поверхностью; a — средний радиус Венеры.

Значения θ (19) были вычислены на ЭВМ «М-222» для диапазона зенитных расстояний 0—80°. Причем исходными величинами являлись массивы чисел ρ_{0i}, b_i, k_i, H_{0i} ($i=0,\ldots,49$), а также k_0, ρ_{00} и a. Эти данные предварительно выбирали и вычисляли согласно модели атмосферы Венеры [4]. Полученные значения астрономической рефракции по отдельным слоям и по всему 100-километровому участку модели атмосферы приведены в табл. 3. Кроме того, из анализа данных табл. 3 следует, что для вычисления астрономической рефракции в атмосфере Венеры с точностью до $\pm 1''$ необходимо детально учитывать нижний 100-километровый слой атмосферы; влияние остальных слоев (от 100 км до 1000 км), очевидно, не превысит $\pm 1''$. Напомним, что для Земли аналогичная точность достигается при детальном учете лишь нижних 30 км атмосферы.

Таблица 3

Астрономическая рефракция в атмосфере Венеры при $t=477°C$, $P=73038,8$ мм. рт. ст., $n_0=1,015586$, $\rho_{00}=6,73\times10^{-2}$ г/см³

z	H, км			
	40	60	80	100
0°	00″,0	00″,0	00″,0	00″,0
5	258,5	277,2	279,0	279,0
10	521,0	558,7	562,4	562,5
15	791,8	849,2	854,9	855,0
20	1075,9	1153,8	1161,6	1161,7
25	1379,0	1478,9	1488,8	1489,0
30	1708,3	1832,1	1844,4	1844,6
32,5	1885,7	2022,4	2035,9	2036,2
35	2073,4	2223,7	2238,6	2238,9
37,5	2273,2	2438,0	2454,3	2454,6
40	2487,0	2667,4	2685,2	2685,6
45	2966,4	3181,7	3203,0	3203,4
47,5	3237,7	3472,8	3496,0	3496,5
50	3534,5	3791,2	3816,6	3817,1
52,5	3860,2	4140,8	4168,5	4169,0
55	4218,5	4525,4	4555,6	4556,0
57,5	4612,5	4948,2	4981,2	4981,9
60	5053,1	5420,5	5456,6	5457,3
62,5	5543,1	5945,1	5984,6	5985,4
65	6077,6	6517,0	6560,0	6560,9
67,5	6657,6	7136,8	7183,7	7184,6
70	7321,6	7842,4	7893,3	7894,3
72,5	8080,0	8643,2	8698,2	8699,3
75	8937,5	9542,6	9601,7	9602,9
77,5	9939,4	10560,9	10623,1	10624,4
80	11200,4	11837,8	11904,1	11905,5

Выполненное исследование, естественно, не претендует на полное решение проблемы рефракции в атмосфере Венеры, а является лишь одной из первых попыток изучения этого вопроса.

Список литературы: 1. *Авдуевский В. Н.* Выдающийся успех советской космонавтики. — «Правда», 1976, 19. II. 2. *Александров Ю. В.* [и др.]. Условия проведения астрономических наблюдений с поверхности Марса. — «Вестник Харьковского ун-та», 1975, № 1, 29, 10. 3. *Конашенок В. Н.* [и др.]. Новое о Венере и Марсе. М., Гидрометиздат, 1970, с. 50. 4. *Кузьмин А. Д., Маров М. Я.* Физика планеты Венера. М., «Наука», 1974. 5. *Маров М. Я.* Модель атмосферы Венеры. — «Докл. АН СССР», 1971, 196, № 1. 6. *Ма-*

ров *М. Я., Рябов О. Л.* Модель атмосферы Венеры. Препринт ИМП, АН СССР, М., 1972, № 39. 7. *Нефедьева А. И.* Астрономическая рефракция, ч. 2. — «Изв. АОЭ», Казань. Изд-во Казанского ун-та, 1973, № 40. 8. Труды ЦНИИГАиК. М., Геодиздат, 1952, вып. 102. 9. *Шашилов Г. Г.* Аналитический расчет астрономической рефракции в атмосфере Марса. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1974, 6. 10. *Edlen B.* Metrologia, 1966, 2, 71. 11. *Owens J. C.* Optical refraktiwe index ofair: dependence on pressure, temperature and composition. — «Applied Optics», 1967, № 1, p. 51—59. 12. *Sugawa C.* On the numerical integration of astronomical refraction. — «Publs. Astron. Soc. Jap.», 1955, 7, № 4, p. 163—175.

Работа поступила 1 февраля 1977 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.

УДК 528.11+519

В. В. КИРИЧУК, канд. техн. наук, *В. А. СКРЫЛЬ*
Львовский политехнический институт

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ В МЕТОДЕ КОЛЛОКАЦИИ

Для математической обработки результатов измерений в настоящее время за рубежом широко используют метод коллокации (унифицированный метод наименьших квадратов), включающий одновременно уравнивание, прогнозирование и фильтрацию по методу наименьших квадратов.

Применение данного метода для обработки геодезических измерений основывается на том, что результат любого геодезического измерения можно разделить на три компоненты:

1) систематическую часть, соответствующую истинным значениям измеряемых объектов;

2) случайную часть, отражающую влияние на результаты измерений случайного процесса, изучение которого является не менее важным, чем нахождение наилучших оценок истинных значений измеряемых объектов (например, влияние рефракционного поля, движений земной коры и т. п.);

3) случайную часть, обусловленную влиянием собственно случайных ошибок измерений.

Формальная математическая модель, лежащая в основе метода коллокации, — коррелатный метод уравнивания с дополнительными неизвестными. Причем задача уравнивания решается с помощью следующих соотношений [5]:

$$x = AX + s' + n; \quad (1) \qquad AX + Bv - x = 0; \quad (2)$$

$$v = [s^T (s' + n)^T]; \quad (3)$$