ров *М. Я., Рябов О. Л.* Модель атмосферы Венеры. Препринт ИМП, АН СССР, М., 1972, № 39. 7. *Нефедьева А. И.* Астрономическая рефракция, ч. 2. — «Изв. АОЭ», Казань. Изд-во Казанского ун-та, 1973, № 40. 8. Труды ЦНИИГАиК. М., Геодиздат, 1952, вып. 102. 9. *Шашилов Г. Г.* Аналитический расчет астрономической рефракции в атмосфере Марса. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1974, 6. 10. *Edlen B.* Metrologia, 1966, 2, 71. 11. *Owens J. C.* Optical refraktiwe index ofair: dependence on pressure, temperature and composition. — «Applied Optics», 1967, № 1, p. 51—59. 12. *Sugawa C.* On the numerical integration of astronomical refraction. — «Publs. Astron. Soc. Jap.», 1955, 7, № 4, p. 163—175.

Работа поступила 1 февраля 1977 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.

УДК 528.11+519

В. В. КИРИЧУК, канд. техн. наук, *В. А. СКРЫЛЬ*
Львовский политехнический институт

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ В МЕТОДЕ КОЛЛОКАЦИИ

Для математической обработки результатов измерений в настоящее время за рубежом широко используют метод коллокации (унифицированный метод наименьших квадратов), включающий одновременно уравнивание, прогнозирование и фильтрацию по методу наименьших квадратов.

Применение данного метода для обработки геодезических измерений основывается на том, что результат любого геодезического измерения можно разделить на три компоненты:

1) систематическую часть, соответствующую истинным значениям измеряемых объектов;

2) случайную часть, отражающую влияние на результаты измерений случайного процесса, изучение которого является не менее важным, чем нахождение наилучших оценок истинных значений измеряемых объектов (например, влияние рефракционного поля, движений земной коры и т. п.);

3) случайную часть, обусловленную влиянием собственно случайных ошибок измерений.

Формальная математическая модель, лежащая в основе метода коллокации, — коррелатный метод уравнивания с дополнительными неизвестными. Причем задача уравнивания решается с помощью следующих соотношений [5]:

$$x = AX + s' + n; \quad (1) \qquad AX + Bv - x = 0; \qquad (2)$$

$$v = [s^T (s' + n)^T]; \qquad (3)$$

$$X = A^T \cdot \bar{C}^{-1} \cdot x \cdot (A^T \cdot \bar{C}^{-1} \cdot A)^{-1}; \quad (4) \qquad \bar{C} = C_{s's'} + C_{nn}; \qquad (5)$$

$$v = Q \cdot B^T \cdot \bar{C}^{-1} \cdot (x - AX); \quad (6) \qquad Q = \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sx} \\ C_{xs} & \bar{C} \end{bmatrix}; \qquad (7)$$

$$B = [0\ 1]; \quad (8) \qquad s = C_{sx} \cdot \bar{C}^{-1} \cdot (x - AX), \qquad (9)$$

где $x = (x_1 x_2 \ldots x_q)$ — вектор результатов измерений; $X = (X_1 X_2 \ldots X_m)$, $m < q$ — неизвестных параметров; $s' = (s_1' s_2' \ldots s_q')$ — сигналов в точках измерений; $n = (n_1 n_2 \ldots n_q)$ — случайных ошибок измерений; $s = (s_1 s_2 \ldots s_p)$ — сигналов в произвольных точках *; $C_{s's'}$, C_{nn}, C_{ss}, C_{sx} — соответствующие ковариационные матрицы.

Оценка точности результатов уравнивания выполняется по формулам:

$$E_{xx} = (A^T \cdot \bar{C}^{-1} \cdot A)^{-1}; \qquad (10)$$

$$E_{ss} = C_{ss} - C_{sx} \cdot \bar{C}^{-1} \cdot C_{xs} + H \cdot A \cdot E_{xx} \cdot A^T \cdot H^T. \qquad (11)$$

Здесь E_{xx} — матрица дисперсий уравненных значений параметров: E_{ss} — матрица дисперсий сигналов и $H = C_{sx} \bar{C}^{-1}$.

Если сравнить алгоритм обработки результатов измерений по методу коллокации с алгоритмом классического метода наименьших квадратов (например, [3]), то обращает на себя внимание тот факт, что в обоих случаях необходим переход от начальных уравнений ошибок (или условных уравнений) к нормальным уравнениям и последующее обращение матрицы коэффициентов нормальных уравнений.

Как известно [4], такая процедура обладает следующими недостатками:

1) обращение матриц больших размеров затруднительно даже для ЭВМ третьего поколения;

2) обусловленность матрицы коэффициентов нормальных уравнений будет тем хуже, чем больше числа обусловленности начальной матрицы A;

3) при решении плохо обусловленных задач методы, основанные на решении систем нормальных уравнений, дают точность на порядок ниже, чем, например, метод ортогонализации;

4) потеря значимых цифр в случае применения обычной процедуры достигает величины, равной логарифму числа обусловленности матрицы системы нормальных уравнений, в то время как в методе ортогонализации эта потеря не превышает половины этой величины.

Применим для решения задачи обработки измерений по методу коллокации известную модификацию ортогонализации Грама—Шмида [4]. Пусть в уравнении (2) матрицы имеют размерность:

---

* Число точек, в которых прогнозируется сигнал s_p, может быть произвольным.

$$B - [q \times (p+q)];\ A - (q \times m);\ X - (m \times 1);$$
$$x - (q \times 1);\ v - [(p+q) \times 1].$$

Представим, согласно работе [4], это уравнение в виде

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{12}$$

где горизонтальное подразделение матриц таково, что матрица A_1 является квадратной. Тогда обобщенная ортогонализация матрицы

$$\begin{array}{|c|c|} \hline Q^{1/2} \cdot B_1 & Q^{1/2} \cdot B_2 \\ \hline A_1 & A_2 \\ \hline -x_1 & -x_2 \\ \hline \end{array} \tag{13}$$

с главной подматрицей

$$\begin{array}{|c|c|} \hline Q^{1/2} \cdot B_1 & Q^{1/2} \cdot B_2 \\ \hline A_1 & A_2 \\ \hline \end{array} = A_0 \tag{14}$$

приводит к матрице

$$\begin{array}{|c|c|} \hline W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{21} & W_{22} \\ \hline w_{31} & w_{32} \\ \hline \end{array}, \tag{15}$$

где матрица

$$\begin{array}{|c|c|} \hline W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{21} & W_{22} \\ \hline \end{array} = W, \tag{16}$$

— результат ортогонализации матрицы A_0 по обычным правилам [1, 2], а матрицы w_{31} и w_{32} соответственно равны:

$$\left.\begin{aligned} w_{31} &= -x_1 \cdot R^{-1}; \\ w_{32} &= -x_2 \cdot R^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Здесь $R = A_0 \cdot W^{-1}$, а $w_{31} \to 0$, $w_{32} \to -xR^{-1}$ согласно принципу экстремальных весов Шмида [6].

Используя теперь подматрицы ортогонализованной матрицы (15), решаем задачу обработки измерений по методу коллокации так:

$$\left.\begin{aligned} X &= (W_{21} \cdot w_{31}^T + W_{22} \cdot w_{32}^T); \\ v &= Q^{1/2} \cdot W_{12} \cdot w_{32}^T, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

оценивая точность по формулам:

$$\left.\begin{aligned} E_{xx} &= W_{21} \cdot W_{11}^T \cdot W_{11} \cdot W_{21}^T - W_{22} \cdot W_{22}^T; \\ E_{ss} &= Q^{1/2} \cdot (E - W_{12} \cdot W_{12}^T)\, Q^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Список литературы: 1. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М., «Недра», 1967. 2. *Дроздов Н. Д.* Линейная алгебра в теории уравнивания измерений. М., «Недра», 1972. 3. *Мазмишвили А. И.* Способ наименьших квадратов. М., «Недра», 1968. 4. *Charamza F.* Ortogonalization algoritm for solving the fundamental problems of the calculus of observations. — «Geofys. sb.», Praha, 1973, № 345—362. 5. *Moritz H.* Least — squares collocation. «Veröff. Deutsche geod. Komis. Wiss.», 1973, A, № 75. 6. *Schmid H.* Ein allgemeiner Ausgleichungs — Algorithmus zur Auswertung von hybriden Messordnungen. — «Bildmess. und Luftbildwesen», 1965, № 7.

Работа поступила 23 мая 1977 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.

УДК 528.35

Я. М. КОСТЕЦКАЯ, канд. техн. наук
Львовский политехнический институт

ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ ПУНКТОВ В СЕТЯХ ТРИЛАТЕРАЦИИ

В работах [1, 2] получены довольно сложные формулы для определения поперечного сдвига точек сетей трилатерации. Поэтому был проведен анализ всех материалов по выводу формул с целью их упрощения.

Для получения формулы обратного веса поперечного сдвига конца диагонали, расположенной в середине сети трилатерации, в работе [1] величины $A_i = \frac{[a_i f(i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]}$, вносимые в обратный вес i-м условным уравнением, группировались по $n-1$ членов (где n — число рядов в сети). Таким образом, был получен ряд величин t_i из N членов (N — число центральных си-