

*В. В. КИРИЧУК*, канд. техн. наук, *В. А. СКРЫЛЬ*  
Львовский политехнический институт

## НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ В МЕТОДЕ КОЛЛОКАЦИИ

Для математической обработки результатов измерений в настоящее время за рубежом широко используют метод коллокации (унифицированный метод наименьших квадратов), включающий одновременно уравнивание, прогнозирование и фильтрацию по методу наименьших квадратов.

Применение данного метода для обработки геодезических измерений основывается на том, что результат любого геодезического измерения можно разделить на три компоненты:

1) систематическую часть, соответствующую истинным значениям измеряемых объектов;

2) случайную часть, отражающую влияние на результаты измерений случайного процесса, изучение которого является не менее важным, чем нахождение наилучших оценок истинных значений измеряемых объектов (например, влияние рефракционного поля, движений земной коры и т. п.);

3) случайную часть, обусловленную влиянием собственно случайных ошибок измерений.

Формальная математическая модель, лежащая в основе метода коллокации, — коррелятный метод уравнивания с дополнительными неизвестными. Причем задача уравнивания решается с помощью следующих соотношений [5]:

$$x = AX + s' + n; \quad (1) \quad AX + Bv - x = 0; \quad (2)$$

$$v = [s^T (s' + n)^T]; \quad (3)$$

$$X = A^T \cdot \bar{C}^{-1} \cdot x \cdot (A^T \cdot \bar{C}^{-1} \cdot A)^{-1}; \quad (4) \quad \bar{C} = C_{s's'} + C_{nn}; \quad (5)$$

$$v = Q \cdot B^T \cdot \bar{C}^{-1} \cdot (x - AX); \quad (6) \quad Q = \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sx} \\ C_{xs} & \bar{C} \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$B = [0 \ 1]; \quad (8) \quad s = C_{sx} \cdot \bar{C}^{-1} \cdot (x - AX), \quad (9)$$

где  $x = (x_1 x_2 \dots x_q)$  — вектор результатов измерений;  $X = (X_1 X_2 \dots X_m)$ ,  $m < q$  — неизвестных параметров;  $s' = (s'_1 s'_2 \dots s'_q)$  — сигналов в точках измерений;  $n = (n_1 n_2 \dots n_q)$  — случайных ошибок измерений;  $s = (s_1 s_2 \dots s_p)$  — сигналов в произвольных точках\*;  $C_{s's'}$ ,  $C_{nn}$ ,  $C_{ss}$ ,  $C_{sx}$  — соответствующие ковариационные матрицы.

Оценка точности результатов уравнивания выполняется по формулам:

$$E_{xx} = (A^T \cdot \bar{C}^{-1} \cdot A)^{-1}; \quad (10)$$

$$E_{ss} = C_{ss} - C_{sx} \cdot \bar{C}^{-1} \cdot C_{xs} + H \cdot A \cdot E_{xx} \cdot A^T \cdot H^T. \quad (11)$$

Здесь  $E_{xx}$  — матрица дисперсий уравненных значений параметров;  $E_{ss}$  — матрица дисперсий сигналов и  $H = C_{sx} \bar{C}^{-1}$ .

Если сравнить алгоритм обработки результатов измерений по методу коллокации с алгоритмом классического метода наименьших квадратов (например, [3]), то обращает на себя внимание тот факт, что в обоих случаях необходим переход от начальных уравнений ошибок (или условных уравнений) к нормальным уравнениям и последующее обращение матрицы коэффициентов нормальных уравнений.

Как известно [4], такая процедура обладает следующими недостатками:

1) обращение матриц больших размеров затруднительно даже для ЭВМ третьего поколения;

2) обусловленность матрицы коэффициентов нормальных уравнений будет тем хуже, чем больше числа обусловленности начальной матрицы  $A$ ;

3) при решении плохо обусловленных задач методы, основанные на решении систем нормальных уравнений, дают точность на порядок ниже, чем, например, метод ортогонализации;

4) потеря значимых цифр в случае применения обычной процедуры достигает величины, равной логарифму числа обусловленности матрицы системы нормальных уравнений, в то время как в методе ортогонализации эта потеря не превышает половины этой величины.

Применим для решения задачи обработки измерений по методу коллокации известную модификацию ортогонализации Грама—Шмида [4]. Пусть в уравнении (2) матрицы имеют размерность:

\* Число точек, в которых прогнозируется сигнал  $s_p$ , может быть произвольным.

$$B - [q \times (p + q)]; A - (q \times m); X - (m \times 1);$$

$$x - (q \times 1); v - [(p + q) \times 1].$$

Представим, согласно работе [4], это уравнение в виде

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (12)$$

где горизонтальное подразделение матриц таково, что матрица  $A_1$  является квадратной. Тогда обобщенная ортогонализация матрицы

$$\begin{array}{|c|c|} \hline Q^{1/2} \cdot B_1 & Q^{1/2} \cdot B_2 \\ \hline A_1 & A_2 \\ \hline -x_1 & -x_2 \\ \hline \end{array} \quad (13)$$

с главной подматрицей

$$\begin{array}{|c|c|} \hline Q^{1/2} \cdot B_1 & Q^{1/2} \cdot B_2 \\ \hline A_1 & A_2 \\ \hline \end{array} = A_0 \quad (14)$$

приводит к матрице

$$\begin{array}{|c|c|} \hline W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{21} & W_{22} \\ \hline w_{31} & w_{32} \\ \hline \end{array}, \quad (15)$$

где матрица

$$\begin{array}{|c|c|} \hline W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{21} & W_{22} \\ \hline \end{array} = W, \quad (16)$$

— результат ортогонализации матрицы  $A_0$  по обычным правилам [1, 2], а матрицы  $w_{31}$  и  $w_{32}$  соответственно равны:

$$\left. \begin{array}{l} w_{31} = -x_1 \cdot R^{-1}; \\ w_{32} = -x_2 \cdot R^{-1}. \end{array} \right\} \quad (17)$$

Здесь  $R = A_0 \cdot W^{-1}$ , а  $w_{31} \rightarrow 0$ ,  $w_{32} \rightarrow -xR^{-1}$  согласно принципу экстремальных весов Шмида [6].

Используя теперь подматрицы ортогонализованной матрицы (15), решаем задачу обработки измерений по методу коллокации так:

$$\left. \begin{aligned} X &= (W_{21} \cdot w_{31}^T + W_{22} \cdot w_{32}^T); \\ v &= Q^{1/2} \cdot W_{12} \cdot w_{32}^T, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

оценивая точность по формулам:

$$\left. \begin{aligned} E_{xx} &= W_{21} \cdot W_{11}^T \cdot W_{11} \cdot W_{21}^T - W_{22} \cdot W_{22}^T; \\ E_{ss} &= Q^{1/2} \cdot (E - W_{12} \cdot W_{12}^T) \cdot Q^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

**Список литературы:** 1. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М., «Недра», 1967. 2. Дроздов Н. Д. Линейная алгебра в теории уравнивания измерений. М., «Недра», 1972. 3. Мазмишвили А. И. Способ наименьших квадратов. М., «Недра», 1968. 4. Charamza F. Orthogonalization algorithm for solving the fundamental problems of the calculus of observations. — «Geofys. sb.», Praha, 1973, № 345—362. 5. Moritz H. Least — squares collocation. «Veröff. Deutsche geod. Komiss. Wiss.», 1973, A, № 75. 6. Schmid H. Ein allgemeiner Ausgleichungs — Algorithmus zur Auswertung von hybriden Messordnungen. — «Bildmess. und Luftbildwesen», 1965, № 7.

Работа поступила 23 мая 1977 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.