Здесь $R = A_0 \cdot W^{-1}$, а $w_{31} \to 0$, $w_{32} \to -xR^{-1}$ согласно принципу экс-тремальных весов Шмида [6].

Используя теперь подматрицы ортогонализованной матрицы (15), решаем задачу обработки измерений по методу коллокации так:

$$\left.\begin{aligned} X &= (W_{21} \cdot w_{31}^T + W_{22} \cdot w_{32}^T); \\ v &= Q^{1/2} \cdot W_{12} \cdot w_{32}^T, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

оценивая точность по формулам:

$$\left.\begin{aligned} E_{xx} &= W_{21} \cdot W_{11}^T \cdot W_{11} \cdot W_{21}^T - W_{22} \cdot W_{22}^T; \\ E_{ss} &= Q^{1/2} \cdot (E - W_{12} \cdot W_{12}^T)\, Q^{1/2}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Список литературы: 1. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М., «Недра», 1967. 2. *Дроздов Н. Д.* Линейная алгебра в теории уравнивания измерений. М., «Недра», 1972. 3. *Мазмишвили А. И.* Способ наименьших квадратов. М., «Недра», 1968. 4. *Charamza F.* Ortogonalization algoritm for solving the fundamental problems of the calculus of observations. — «Geofys. sb.», Praha, 1973, № 345—362. 5. *Moritz H.* Least — squares collocation. «Veröff. Deutsche geod. Komis. Wiss.», 1973, A, № 75. 6. *Schmid H.* Ein allgemeiner Ausgleichungs — Algorithmus zur Auswertung von hybriden Messordnungen. — «Bildmess. und Luftbildwesen», 1965, № 7.

Работа поступила 23 мая 1977 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.

УДК 528.35

Я. М. КОСТЕЦКАЯ, канд. техн. наук
Львовский политехнический институт

ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ ПУНКТОВ В СЕТЯХ ТРИЛАТЕРАЦИИ

В работах [1, 2] получены довольно сложные формулы для определения поперечного сдвига точек сетей трилатерации. Поэтому был проведен анализ всех материалов по выводу формул с целью их упрощения.

Для получения формулы обратного веса поперечного сдвига конца диагонали, расположенной в середине сети трилатерации, в работе [1] величины $A_i = \frac{[a_i f(i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]}$, вносимые в обратный вес i-м условным уравнением, группировались по $n-1$ членов (где n — число рядов в сети). Таким образом, был получен ряд величин t_i из N членов (N — число центральных систем в каждом сдвоенном ряде системы). Этот ряд оказался близким к ряду $\tau_i = Ki^2$, где $i=1, 2, 3, \ldots, N$. Коэффициент пропорциональности K в данном случае зависел от размера сети, т. е. от N. Эта зависимость выражалась многочленом второй степени от N. Сумма величин i^2 определялась многочленом третьей степени от N. Отсюда следует, что $\sum\limits_{i=1}^{(n-1)N} A_i$ определяется многочленом пятой степени и таким же многочленом определяется обратный вес поперечного сдвига конца диагонали.

В работе [2] показано, что полученной в работе [1] формулой можно пользоваться для определения поперечного сдвига любой K-й точки диагонали, если в нее подставить $N=K-1$, где K — число сторон диагонали, отделяющих оцениваемую точку от края сети трилатерации.

При анализе значений $[a_i f(i-1)]$, входящих в числители величин A_i, которые вносятся каждым рядом центральных систем в отдельности в обратный вес поперечного сдвига K-й точки, было замечено, что основная часть значащих, т. е. не равных нулю, величин $[a_i f(i-1)]$ представляет арифметическую прогрессию. Причем значения первого члена прогрессии a_0 и ее разности α постоянны только для величин одного ряда центральных систем. Величинам $[a_i f(i-1)]$, которые могут быть представлены арифметической прогрессией, соответствуют постоянные значения преобразованных квадратических членов условных уравнений. Поэтому основная часть суммы величин A_i, вносимых одним рядом центральных систем в обратный вес, равна сумме квадратов членов арифметической прогрессии, разделенной на значение $[a_i a_i(i-1)]$. Оставшиеся величины $[a_i f(i-1)]$ легко найти, раскрывая алгоритм Гаусса.

Рассмотрим определение обратного веса поперечного сдвига K-й точки диагонали, расположенной в середине сети строенного ряда трилатерации. Обратный вес в этом случае равен

$$\frac{1}{P} = [ff] - \sum_{1}^{N} A_i - \sum_{N+1}^{2N} A_i.$$

Для нахождения каждой из сумм величин A_i нужно из ряда $[a_i f(i-1)]$ выделить те значения, которые можно представить как арифметическую прогрессию, затем определить величины a_0 и α и найти закономерности образования остальных значений $[a_i f(i-1)]$. Для наглядности в табл. 1 приведены значения $[a_i f(i-1)]$ и $[a_i a_i(i-1)]$ для точки $K=13$ в строенном ряде с $N=20$. Как видно из таблицы, начиная с $[a_6 f\cdot 5]$, т. е. при $6 \leqslant i \leqslant K-3$, значения $[a_i f(i-1)]$ представляют арифметическую прогрессию с $a_0 = 8{,}83$ и $\alpha = 4{,}73$ из $K-7$ членов. Им соответствуют постоянные значения величин $[a_i a_i(i-1)] = 11{,}196$.

Сумма квадратов членов арифметической прогрессии

$$\sum_{1}^{l}[a_0+(i-1)\alpha]^2=(a_0-\alpha)^2 l+2\alpha(a_0-\alpha)\sum_{1}^{l} i+\alpha^2\sum_{1}^{l} i^2. \qquad (1)$$

В нашем случае $l=K-7$. Учитывая значения a_0, α и $[a_i a_i(i-1)]$, получаем

$$\sum_{i=6}^{K-3} A_i = 0{,}6673\,K^3 - 11{,}282\,K^2 + 63{,}41\,K - 119{,}95. \qquad (2)$$

Таблица 1

Значения преобразованных квадратических членов условных уравнений и неквадратических членов весовой функции поперечного сдвига точки $K=13$ в сети с $N=20$

$[a_i a_i\ (i-1)]$		$[a_i f\ (i-1)]$	
при $1 \leqslant i \leqslant N$	$N+1 \leqslant i \leqslant 2N$	$1 \leqslant i \leqslant N$	$N+1 \leqslant i \leqslant 2N$
12,000	10,000	—39,84	0
11,250	8,656	—46,33	0
11,200	8,537	—45,27	0
11,196	8,528	—41,57	0
11,196	8,527	—37,15	0
11,196	8,527	—32,46	0
11,196	8,527	—27,75	+ 0,39
11,196	8,527	—23,02	— 1,38
11,196	8,527	—18,29	— 0,95
11,196	8,527	—13,56	— 2,76
11,196	8,527	— 8,83	— 4,57
11,196	8,527	+ 0,36	— 6,40
11,196	8,527	+ 0,10	— 8,24
11,196	8,527	+ 0,01	—10,09
11,196	8,527	0	—11,94
11,106	8,527	0	—13,78
11,196	8,527	0	—15,63
11,196	8,527	0	—17,48
11,196	8,527	0	—19,32
11,196	9,771	0	—47,82

Закон образования первых пяти величин $a_i f(i-1)$ легко найти, исходя из значений коэффициентов нормальных уравнений и весовых функций, приведенных в работе [1], раскрывая алгоритм Гаусса:

$$[a_1 f] = -3{,}464\,K + 5{,}196;\ [a_2 f\cdot 1] = -3{,}464\,K +$$

$$+8{,}661 - \frac{(-3)}{12}(-3{,}464\,K + 5{,}196) = -4{,}330\,K + 9{,}960;$$

$$[a_3 f\cdot 2] = -4{,}619\,K + 14{,}781;\ [a_4 f\cdot 3] = -4{,}702\,K + 19{,}548;$$

$$[a_5 f\cdot 4] = -4{,}724\,K + 24{,}785;$$

Возведя каждое из этих значений величин $[a_i f(i-1)]$ в квадрат и разделив его на соответствующее ему значение $[a_i a_i(i-1)]$, а затем просуммировав все полученные результаты, будем иметь

$$\sum_{1}^{5} A_i = 8{,}5387\,K^2 - 59{,}771\,K + 117{,}655. \qquad (3)$$

Однако остались еще не учтенными три величины A_i, которые повторяются у всех точек K. Их сумма равна 0,783. Суммируя ее с выражениями (2) и (3), получаем

$$\sum_{i=1}^{N} A_i = 0{,}6673\,K^3 - 2{,}743\,K^2 + 3{,}64\,K - 1{,}51. \qquad (4)$$

Чтобы определить $\sum\limits_{N+1}^{2N} A_i$, рассмотрим ряд величин $[a_i f(i-1)]$ при $N+1 \leqslant i \leqslant 2N$. Его значащие члены, кроме двух первых и последнего, представляют арифметическую прогрессию с $a_0 = 0{,}85$, $\alpha = 1{,}85$ из $(K-2)$ членов. Подставим эти значения в равенство (1) и учтем, что этим значениям $[a_i f(i-1)]$ соответствуют $[a_i a_i(i-1)] = 8{,}527$. Выполнив соответствующие вычисления, будем иметь

$$\sum_{2N-K+2}^{2N-1} A_i = 0{,}1334\,K^3 - 0{,}816\,K^2 + 1{,}634\,K - 1{,}07. \qquad (5)$$

Раскрыв алгоритм Гаусса для последней величины, получим $[a_{2N} f(2N-1)] = 3{,}985\,(K-1)$. Использовав данное равенство, определим A_{2N}

$$A_{2N} = \frac{3{,}985^2\,(K-1)}{9{,}771} = 1{,}63\,(K-1). \qquad (6)$$

Первые две значащие величины $[a_i f(i-1)]$ повторяются для любой точки K. Поэтому подсчитаем соответствующие им значения величин A. Сумма их равна 0,24. Складывая равенства (5), (6) и сумму двух оставшихся членов, получаем

$$\sum_{N+1}^{2N} A_i = 0{,}1334\,K^3 - 0{,}812\,K^2 - 1{,}626\,K + 0{,}803. \qquad (7)$$

Чтобы определить обратный вес поперечного сдвига K-й точки диагонали строенного ряда, вычтем из $[ff]$ суммы $\sum\limits_{1}^{N} A_i$ и $\sum\limits_{N+1}^{2N} A_i$. Для строенного ряда

$$[ff] = \frac{1}{9}\,(8K^3 - 3K^2 + 13\,K),$$

а обратный вес

$$\frac{1}{P_3} = 0{,}0882\,K^3 + 1{,}6\,K^2 - 0{,}6\,K + 0{,}7. \qquad (8)$$

Найдем обратный вес поперечного сдвига K-й точки диагонали, расположенной в середине сети трилатерации, построенной из пяти рядов треугольников

$$\frac{1}{P_5} = [ff] - \sum_{1}^{N} A_i - \sum_{N+1}^{2N} A_i - \sum_{2N+1}^{3N} A_i - \sum_{3N+1}^{4N} A_i. \qquad (9)$$

Для пятикратного ряда величины, входящие в формулу (9), имеют такие значения:

$$[ff] = \frac{1}{9}(8K^3 + 8K^2 + 25\,K);$$

$$\sum_{1}^{N} A_i = 0{,}07402\,K^3 - 0{,}19125\,K^2 + 0{,}1416\,K + 0{,}384;$$

$$\sum_{N+1}^{2N} A_i = 0{,}72598\,K^3 - 0{,}38861\,K^2 + 2{,}0074\,K - 2{,}353;$$

$$\sum_{2N+1}^{3N} A_i = 0{,}04442\,K^3 - 0{,}13936\,K^2 - 0{,}3134\,K + 1{,}471;$$

$$\sum_{3N+1}^{4N} A_i = 0{,}01904\,K^3 - 0{,}12239\,K^2 + 0{,}1091\,K + 0{,}683.$$

Подставив их в уравнение (9), получим

$$\frac{1}{P_5} = 0{,}0254\,K^3 + 1{,}731\,K^2 + 0{,}83\,K + 0{,}2. \qquad (10)$$

Таким же методом получим формулу для определения обратного веса поперечного сдвига K-й точки диагонали, расположенной в середине семикратного ряда трилатерации

$$\frac{1}{P_7} = 0{,}011\,K^3 + 1{,}853\,K^2 - 0{,}77\,K + 0{,}6. \qquad (11)$$

В табл. 2 приведены значения обратных весов поперечных сдвигов для ряда точек сетей трилатерации, построенных из трех, пяти и семи рядов треугольников. Обратные веса определены по полученным формулам. Там же даны средние квадратические сдвиги этих точек, определенные по формуле

$$m_t = \mu \sqrt{\frac{1}{P}},$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса, $\mu = 6$ см.

Сравнивая величины m_t из табл. 2 с их значениями, полученными из решения схемы Гаусса в работе [2], можно сказать, что формулы (8), (10) и (11) практически являются точными.

Таблица 2

Обратные веса поперечных сдвигов и средние квадратические сдвиги, вычисленные по формулам (8), (10) и (11)

K	$n=3$, по формуле (8)		$n=5$, по формуле (10)		$n=7$, по формуле (11)	
	$\frac{1}{P_3}$	m_t	$\frac{1}{P_5}$	m_t	$\frac{1}{P_7}$	m_t
1	1,8	8,050	2,8	10,040	1,7	7,823
4	29,5	32,588	32,8	34,363	27,9	31,692
8	143,5	71,875	130,6	68,568	118,7	65,370
11	305,1	104,803	252,6	95,360	231,0	91,192
13	457,1	128,279	359,3	113,731	327,9	108,648
18	1022,7	191,878	725,1	161,566	651,3	153,123
21	1510,5	233,191	1016,2	191,267	903,5	180,350
22	1701,1	247,466	1126,7	201,398	997,6	189,509
25	2363,8	191,713	1499,7	232,356	1311,8	217,313
26	2616,9	306,934	1638,4	242,863	1426,5	226,614

В работе [1] приведены обратные веса поперечного сдвига конца диагонали сетей трилатерации разных размеров. Сравнивая их с обратными весами точек с номерами $K=N-1$ диагоналей соответствующих сетей, приходим к выводу, что и в этом случае формулы дают точные результаты. Только формула (10) в данном случае дает погрешность порядка 5%, что обусловлено тем, что в работе [2] была рассмотрена сеть несколько другой конфигурации. Формулы (8) и (11) дают точные результаты как при определении поперечного сдвига K-х точек диагонали, так и при определении сдвига конца диагонали. Формулу (11) можно рекомендовать для определения поперечных сдвигов точек в сплошных сетях. Такое заключение можно сделать, анализируя данные табл. 2. Они показывают, что изменения сдвигов при увеличении количества рядов с трех до пяти в среднем в три раза больше изменений при увеличении количества рядов с пяти до семи. Причем изменения в сдвигах даже сильно удаленных точек не превышают 7%, а сдвиг точек сплошной сети, определенный по формуле (7), будет завышен, а не занижен.

Список литературы: 1. *Костецкая Я. М.* Определение поперечного сдвига диагонали ряда треугольников, находящегося в середине сети трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 8. 2. *Костецкая Я. М.* Исследование закономерностей накопления погрешностей положения пунктов в сплошных сетях трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 19.

Работа поступила 26 мая 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.